Corrigé d'examen d'analyse 1 SMA-SMI
$(2019 - 2020$ *session normale*$)$.

Abdelkhalek El amrani
Département de mathématiques
Faculté des Sciences Dhar Mahraz .
e-mail: abdelkhalek.elamrani@usmba.ac.ma

28 janvier 2020

0.1 Épreuve d'Analyse 1 : session normale 2019-2020 :

Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mahraz
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
Jeudi 09 Janvier 2020

SMA-SMI/S1, S.N.
Épreuve d'Analyse 1
Durée : 1 h 30 min

N.B. : Aucun document n'est autorisé et tous les résultats doivent être justifiés

Exercice 1 : (Question de cours) Soient $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si, et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de E convergeant vers a , la suite $(f(x_n))$ tend vers l .

Exercice 2 : On considère $A = \left\{ x + \frac{1}{x} \ : \ x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
2. Montrer que A admet une borne inférieure et déterminer $Inf(A)$.
3. Montrer que A n'est pas majorée .

Exercice 3 :

1. Montrer, en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels et limite d'une suite de nombres irrationnels.
2. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x \ , & si \ x \in \mathbb{Q} \\ 1 \ , & si \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Exercice 4 : On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ $\ et \ $ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Étudier la nature de la suite (u_n) selon les valeurs de u_0 .
2. On suppose que $u_0 = \sqrt{2}$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\, u_n = 2cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

   (Vérifier que $(\forall t \in \mathbb{R})$ $cos(2t) = 2cos^2(t) - 1$).
3. En déduire les valeurs de $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

Exercice 5 : Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ convergeant vers a .

1. Montrer que la suite $(f(x_n))_n$ est convergente (utiliser le critère de Cauchy) . Notons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$.
2. Soit (y_n) une autre suite d'éléments de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ qui tend vers a ; montrer que la suite $(f(y_n))_n$ tend vers l .
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité au point a .
4. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^*$.

Bon courage

0.1.1 Solution :

Exercice 1 : **(Question de Cours)**

$\Longrightarrow]$ On suppose que $\lim\limits_{n\to a} f(x) = l$ et on considère une suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ telle que $(\forall x \in E)\ \ | x - a |< \eta \Longrightarrow | f(x) - l |< \varepsilon$.
Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors pour ce $\eta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que :
$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant N \Longrightarrow | x_n - a |< \eta$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} n \geqslant N &\Longrightarrow | x_n - a |< \eta \\ &\Longrightarrow | f(x_n) - l |< \varepsilon . \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.
$\Longleftarrow]$ On suppose que pour toute suite (x_n) d'éléments de E convergeant vers a , la suite $(f(x_n))$ tend vers l . Montrons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. Par l'absurde, supposons que f n'admet pas l pour limite quand x tend vers a . Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$(\forall \eta > 0)\ \ (\exists x \in E) :| x - a |< \eta\ et\ \ \ | f(x) - l |\geqslant \varepsilon .$$

Donc,

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ (\exists x_n \in E) :| x_n - a |< \frac{1}{n}\ et\ \ \ | f(x_n) - l |\geqslant \varepsilon .$$

Ainsi, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E qui converge vers a et la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers l ce qui est absurde .

Exercice 2 :

1. Soit $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} - 2 &= \frac{x^2 + 1 + 2x}{x} \\ &= \frac{(x+1)^2}{x} \\ &\geqslant 0 \quad car\ x > 0 . \end{aligned}$$

   Donc pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
   Autre méthode : $(\forall x > 0)\ \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 0$, d'où $(\forall x > 0)\ \ x - 2 + \frac{1}{x} \geqslant 0$, donc $(\forall x > 0)\ \ x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
2. On a $2 = 1 + \frac{1}{1}\ et\ 1 \in \mathbb{R}_+^*$, d'où $2 \in A$ et alors $A \neq \emptyset$. Et d'après la première question A est minorée par 2, donc A admet une borne inférieure .
   Inf (A) : Comme 2 est un minorant de A et $2 \in A$, alors $Inf(A) = 2$.
3. Par l'absurde, supposons que A est majorée, alors :

$$(\exists M > 0) : (\forall a \in A)\, a \leqslant M\ \ (M > 0\ car\ \ (\forall a \in A)\ \ a > 0)\ .$$

   D'où $(\exists M > 0) : (\forall x > 0)\ \ x+\frac{1}{x} \leqslant M$, en particulier pour $x = M$, on a : $M+\frac{1}{M} \leqslant M$ d'où $\frac{1}{M} < 0$ ou encore $1 < 0$ ce qui est absurde .

Exercice 3 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x < x + \frac{1}{n}$, d'où la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ respectivement dans $\mathbb{R}$ entraine qu'il existe $r_n \in \mathbb{Q}$ et $i_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que

$$\begin{cases} x \leqslant r_n \leqslant x + \frac{1}{n} \\ x \leqslant i_n \leqslant x + \frac{1}{n} \end{cases} .$$

Ainsi, il existe $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ telles que

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \begin{cases} x\leqslant r_n\leqslant x+\frac{1}{n}\\ x\leqslant i_n\leqslant x+\frac{1}{n}\end{cases}$$

Et par le théorème des gendarmes, x est limite de ces deux suites .

2. Soit $x\in\mathbb{R}$, alors si f est continue en x, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n)=f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(i_n)=f(x)$ (d'après l'exercice 1) . Or $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} -r_n^2+r_n=-x^2+x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(i_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} 1=1$ d'où $-x^2+x=1$ ou encore $x^2-x+1=0$, d'où x est solution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $t^2-t+1=0$ ce qui est absurde, car cette dernière n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ (son discriminant est strictement négatif : $\Delta=-3$) . Donc f n'est continue en aucun nombre réel .

Exercice 4 :

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x)=\sqrt{2+x}$, et on a : $D_f=[-2,+\infty[$ et f est strictement croissante sur D_f et il y continue , alors $f([0,+\infty[)=\left[\sqrt{2},+\infty\right[(\subset[0,+\infty[)$, on prend $I=[0,+\infty[$; donc

$$\begin{cases} \bullet\ f \text{ est continue sur } I\\ \bullet\ f(I)\subset I\\ \bullet\ u_0\in I\\ \bullet\ (\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$$

Il s'agit donc d'une suite récurrente associée à la fonction croissante f, donc la suite (u_n) est monotone . Par ailleurs, pour tout $x\in I$, on a :

$$\begin{aligned} f(x)-x&=\sqrt{2+x}-x\\ &=\frac{2+x-x^2}{\sqrt{2+x}+x}\ . \end{aligned}$$

Le discriminant de $-x^2+x+2$ est $\Delta=1+8=9$, alors les solutions de $f(x)-x=0$ dans D_f sont $x_1=\frac{1+3}{2}=2$ et $x_2=\frac{1-3}{2}=-1$ et alors 2 est le seul point fixe de f dans I . Et le signe de $f(x)-x$ sur I est donné dans le tableau suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

- Si $u_0=2$, alors $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n=2$, en effet : Pour $n=0$, $u_0=2$.
  Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $u_n=2$, alors $u_{n+1}=f(u_n)=f(2)=2$.
  Donc, d'après le principe de récurrence, $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n=2$.
  La suite (u_n) est donc constante, elle est convergente vers cette constante 2 .
- Si $u_0\in[0,2[$, alors : $f(u_0)-u_0>0$ ou encore $u_1>u_0$, donc la suite (u_n) est croissante et $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\leqslant u_n<2$; En effet :
  Le résultat est vrai pour $n=0$.
  Soit $n\in\mathbb{N}$; supposons que $0\leqslant u_n<2$, alors, $f(0)\leqslant f(u_n)<f(2)$, car f est croissante sur $[0,+\infty[$ d'où $0\leqslant u_{n+1}<2$ car $f(2)=2$.
  Donc, par le principe de récurrence, $(\forall n\in\mathbb{N})\ 0\leqslant u_n<2$.
  La suite (u_n) est alors croissante et majorée par 2, elle est donc convergente vers 2 le seul point fixe de f dans I .

- Si $u_0 \in]2,+\infty[$, alors :$f(u_0) - u_0 < 0$ ou encore $u_1 < u_0$, donc la suite (u_n) est décroissante et $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 2 < u_n$. En effet :
  Le résultat est vrai pour $n = 0$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $2 < u_n$, alors, $2 < f(u_n)$, car f est croissante sur $[0,+\infty[$ et $f(2) = 2$ d'où $2 < u_{n+1}$.
  Donc, par le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 2 < u_n$.
  Donc, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, elle est donc convergente vers 2 l'unique point fixe de f dans I .

2. Soit $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} cos\,(2t) &= cos\,(t+t) \\ &= cos\,(t)\ \ cos\,(t) - sin\,(t)\ \ sin\,(t) \\ &= cos^2\,(t) - \ sin^2\,(t) \\ &= cos^2\,(t) - \Big(1 - cos^2\,(t)\Big) \\ &= 2cos^2\,(t) - 1\ . \end{aligned}$$

Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})\, u_n = 2cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.
Par récurrence, pour $n = 0$, on a : $2\ cos\left(\frac{\pi}{2^{0+2}}\right) = 2cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = u_0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 2cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{2+u_n} \\ &= \sqrt{2 + 2cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \\ &= \sqrt{2\left(1 + cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right)} \\ &= \sqrt{2\left(2cos^2\left(\frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right)} \\ &= \sqrt{4cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)} \\ &= 2\mid cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\mid \\ &= 2cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) \quad car\ 0 < \frac{\pi}{2^{n+3}} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) \geqslant 0 \\ &= 2cos\left(\frac{\pi}{2^{(n+1)+2}}\right)\ . \end{aligned}$$

Donc, selon le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n = 2cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

3.

$$\begin{aligned} cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= cos\left(\frac{\pi}{2^{1+2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ u_1 \quad d'après\ la\ question\ précédente \\ &= \frac{1}{2}\ \sqrt{2+u_0} \\ &= \frac{1}{2}\ \sqrt{2+\sqrt{2}}\ . \end{aligned}$$

Donc $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
Et

$$\begin{aligned}cos\left(\frac{\pi}{16}\right)&=cos\left(\frac{\pi}{2^{2+2}}\right)\\&=\frac{1}{2}\ u_2\ \ d'après\ la\ question\ précédente\\&=\frac{1}{2}\ \sqrt{2+u_1}\\&=\frac{1}{2}\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ .\end{aligned}$$

Donc $cos\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$.

Exercice 5 :

1. Soit $\varepsilon>0$, alors il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $(x,y)\in E^2$ on a : $0<\mid x-y\mid<\alpha\Longrightarrow\mid f(x)-f(y)\mid<\varepsilon$. Or la suite (x_n) est convergente vers a, alors elle est de Cauchy, d'où pour ce $\alpha>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ on a : $(m\geqslant N\ et\ n\geqslant N)\Longrightarrow\mid x_n-x_m\mid<\alpha$.
   Donc, pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ on a :
   $$\begin{aligned}(m\geqslant N\ et\ n\geqslant N)&\Longrightarrow\mid x_n-x_m\mid<\alpha\\&\Longrightarrow\mid f(x_n)-f(x_m)\mid<\varepsilon\ .\end{aligned}$$
   Donc $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy, et alors elle est convergente .
2. Les deux suites (x_n) et (y_n), d'éléments de $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, convergent vers le même réel a, donc la suite (x_n-y_n) converge vers 0, puis f étant uniformément continue sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, d'où, d'après notre cours, la suite $(f(x_n)-f(y_n))$ converge vers 0 . D'où la suite $(f(y_n)-f(x_n))+(f(x_n))$ est convergente vers $0+l$, celle-ci étant égale à $(f(y_n))$, donc la suite $(f(y_n))$ tend vers l .
3. D'après la question 2. on a : pour toute suite (y_n) d'éléments de $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ convergeant vers a, la suite $(f(y_n))$ tend vers l . Donc, d'après l'exercice 1.
   $$\lim_{\substack{x\to a\\x\neq a}}f(x)=l\ ,$$
   f est donc prolongeable par continuité en a et son prolongement par continuité est l'application numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$h(x)=\begin{cases}f(x) & si\ x\in\mathbb{R}\setminus\{a\}\\ l & si\ x=a\end{cases}\ .$$
4. La fonction $f:x\longmapsto\frac{1}{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; elle n'y est pas uniformément continue, car si non, elle serait prolongeable par continuité en 0 (d'après la question 3 de cette exercice) , donc admet une limite finie l en 0, ce qui est en contradiction avec le fait que $\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

□