جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDALLAH DE FES
كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MEHRAZ FES

AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mme(elle) **: AMRI Noura**

Soutiendra **: le 14/03/2020** à **10h** **Lieu : Centre Polyvalent des Etudes doctorales (Nouveau bâtiment)**

Une thèse intitulée :

Sur la géométrie du fibré tangent (unitaire) d'une variété Riemannienne

En vue d'obtenir le Doctorat

FD : Mathématiques et Applications (MA)
Spécialité: Géométrie

Devant le jury composé comme suit :

	NOM ET PRENOM	GRADE	ETABLISSEMENT
Président	Pr.BENKIRANE Abdelmoujib	PES	Faculté des Sciences, Dhar El Mahraz - Fès
Directeur de thèse	Pr. KADAOUI ABASSI Mohamed Tahar	PH	Faculté des Sciences, Dhar ElMahraz - Fès
Co-directeur de thèse	Pr. KHELDOUNI Abdelaziz	PES	Faculté des Sciences, Dhar El Mahraz - Fès
	Pr. AIT BEN HADOU Malika	PES	Faculté des Sciences - Meknès
Rapporteurs	Pr. BOUCETTA Mohamed	PES	FST - Marrakech
	Pr. LAMRINI Faycal	PES	Faculté des Sciences, Dhar El Mahraz - Fès
Membres	Pr. BEJAN Livia Cornelia	PES	Gh.Asachi Technical University –lasi-ROMANIA
	Pr. IKEMAKHEN Aziz	PES	FST – Marrakech
	Pr. FAHLAOUI Said	PES	Faculté des Sciences - Meknès

Résumé:

Il est sans doute vrai que le fibré tangent d'une variété joue un rôle clé en Géométrie différentielle. Il devient un espace Riemannien plus intéressant lorsqu'il est équipé de la métrique de Sasaki (la variété de base étant supposée dans ce cas Riemannienne). En effet, depuis la définition, par S. Sasaki, d'une métrique Riemannienne sur le fibré tangent d'une variété Riemannienne, la géométrie des fibrés tangents a été largement étudiée et analysée par beaucoup de géomètres. Utilisant le concept de naturalité et des notions associées, O. Kowalski et M. Sekizawa ont donné, en 1988, une classification de métriques (non nécessairement pseudo-Riemanniennes) sur les fibrés tangent des variétés Riemanniennes (orientées), obtenues par des transformations naturelles de métriques Riemanniennes sur les variétés orientées en des métriques sur leurs fibrés tangents. Un résultat analogue de classification a été donné par I. {Kol\'{a}\~{r}}, P. W. Michor et J. Slov\'{a}k, lorsque l'orientation de la variété de base n'est pas prise en considération. Les deux résultats de classification ont été améliorés par M. T. K. Abbassi, qui a aussi donné une caractérisation de telles métriquesqu'il a appelées métriques g-naturelles. Il est à noter que les métriques g-naturelles, ainsi obtenues, dépendent d'un nombre fixé (selon la dimension de la variété de base) de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}_{+}$ (fonctions génératrices).\par

Durant les deux dernières décennies, une dynamique de recherche dans ce domaine s'est amorcée, et a conduit à la publication de travaux intéressants qui ont mis la lumière sur certains aspects de la géométrie des fibrés tangents équipés de métriques g-naturelles. L'objectif de cette thèse est de découvrir d'autres aspects en étudiant certaines propriétés géométriques des métriques g-naturelles générales sur le fibré tangent TM et le fibré tangent unitaire T_1M d'une variété Riemannienne (M,g), en relation avec celles de la métrique de base. Plus précisément, on va explorer trois directions: les trajectoires magnétiques sur le fibré tangent unitaire, les symétries infinitésimales sur le fibré tangent et le fibré unitaire tangent et les structures de soliton de Ricci sur le fibré tangent et le fibré unitaire tangent.

Notre étude des trajectoires magnétiques a été motivée par deux facteurs: elles sont d'abord des extensions naturelles des géodésiques et en second lieu elles ont une interprétation physique intéressante. En effet, en Physique elles sont interprétées an tant que trajectoires de particules chargées se déplaçant dans une variété Riemannienne (en particular l'espace Euclidien à trois dimensions) sous l'action de champs magnétiques. Or, la définition des courbes magnétiques nécessite une structure métrique de contact. Ainsi on considère sur le fibré tangent unitaire les structures métriques de contact g-naturelles, et on appelle les trajectoires magnétiques correspondantes les trajectoires magnétiques de contact. On obtient les équations differentielles régissant les trajectoires magnétiques de contact, et on montre qu'une telle trajectoire est équi-inclinée, i.e. son angle de contact est constant si et seulement si une certaine loi de conservation est satisfaite. Lorsque la variété de base est un espace $M(k)$ à courbure sectionnelle constante et la métrique sur le fibré tangent unitaire est de type Kaluza-Klein, les equations des trajectoires magnétiques prennent une forme plus simple. On donne alors une classification complète des courbes magnétiques équi-inclinées (respectivement, les géodésiques) sur $T_1M^2(k)$, lorsque $M^2(k)$ est une surface Riemannienne à courbure de Gauss constante k. En particulier, pour une classe large de métriques g-naturelles pseudo-Riemanniennes de type Kaluza-Klein sur $T_1M^2(k)$, on trouve que chaque courbe normale magnétique de contact équi-inclinée se projette en un cercle Riemannien (géodesique ou non) sur $M^2(k)$, et que si la métrique sur T_1M^2 est non Riemannienne, alors les projections de telles courbes sont nécessairement des géodésiques. Plusieurs résultats sont des généralisations de ceux obtenus par J. Inoguchi et M. I. Munteanu dans le cas de la métrique de Sasaki et la structure métrique de contact standard sur le fibré tangent unitaire. En particulier, on trouve une généralisation d'un résultat dû à Klingenberg et Sasaki sur la 2-sphère, aux sphères de dimension 2 et de rayon quelconque, dont le fibré tangent unitaire est équipé d'une métrique appropriée.

Par ailleurs, l'étude des symétries est un domaine de recherche bien connu en géométrie différentielle avec des interprétations physiques pertinenetes. L'étude des symétries sur le fibré tangent et leurs liens avec les symétries sur la variété de base est un sujet de recherche naturel, qui a été exploré dans des cas spéciaux de métriques et de symétries sur le fibré tangent. Dans ce sens, les champs de Killing sur le fibré tangent muni des métriques de Sasaki et de Cheeger-Gromoll ont été classifiés respectivement par S. Tanno et M. T. K. Abbassi et M. Sarih. Munissant le fibré tangent d'un métrique g-naturelle arbitraire, le problème devient à la fois plus difficile et intrigant. En littérature, on peut trouver certains résultats partiels sur les champs de Killing sur le fibré tangent, relativement à une métrique g-naturelle Riemannienne.

Dans le contexte plus général des métriques g-naturelles pseudo-Riemanniennes sur le fibré tangent, une question naturelle plus spécifique est de déterminer les symétries qui sont en un certain sens \lq\lq héréditaires\rq\rq, dans le sens qu'elles sont obtenues comme relèvements naturels au fibré tangent de certaines symétries sur la variété de base.

A ma connaissance, le seul résultat en littérature concernant les champs de vecteurs conformes sur le fibré tangent bundle est celui de E. Peyghan et A. Heydari, lorsque le fibré tangent est muni d'un type spécial de métriques g-naturelles pseudo-Riemanniennes.

Dans ce travail, on s'intéresse aux symétries classiques sur le fibré tangent, muni d'une métrique g-naturelle pseudo-Riemannienne, provenant naturellement de certains champs de vecteurs et tenseurs sur la variété de base. En particulier, on caractérise complétement les champs de vecteurs conformes, homothétiques et de Killing correspondant aux relèvements horizontal, vertical et complet sur la variété de base. Il est intéressant de voir que l'existence de certaines de ces symétries est exclusive à certaines métriques g-naturelles qui ne sont pas Riemanniennes, mettant l'accent sur les comportements différents entre les géométries Riemanniennes et pseudo-Riemanniennes sur le fibré tangent.

Quant au fibré tangent unitaire d'une variété Riemannienne, équipé de la métrique de Sasaki, T. Konno a réussi à donner une classification des champs de vecteurs de Killing preservant les fibres et une classification complète des champs de vecteurs de Killing dans le cas case où la variété de base est tri-dimensionnelle. A ma connaissance, les champs de vecteurs conformes sur les fibrés tangents unitaires ne sont pas encore étudiés, même dans le cas de la métrique de Sasaki.

Ainsi, dans cette thèse, on se focalise sur l'étude des champs de vecteurs conformes/de Killing sur le fibré tangent unitaire équipé d'une métrique pseudo-Riemannienne g-naturelle arbitraire. Cependant, une classification complète de tels champs de vecteurs s'avère difficile, et on est amené à considérer les trois questions suivantes:

- donner les conditions nécessaires pour que les relèvements horizontal, tangentiel et complet d'un champ de vecteurs au fibré tangent unitaire soit conforme ou de Killing;
- donner une classification complète des champs de vecteurs conformes préservant les fibres sur le fibré tangent unitaire, muni d'une métrique de type Kaluza-Klein;
- donner certains exemples de champs de vecteurs conformes non-préservant les fibres sur le fibré tangent unitaire, muni d'une métrique de type Kaluza-Klein.

Finalement, les solitons de Ricci ont été intensément étudiés dans divers contextes et de sous plusieurs angles. Dans cette thèse, on s'intéresse aux structures de \emph{solitons de Ricci naturels} sur le fibré tangent et le fibré tangent unitaire d'une variété Riemannienne, i.e. celles associées à des métriques g-naturelles pseudo-Riemanniennes. Notre objectif est double. D'une part, on explore les structures de solitons de Ricci naturels sur les fibrés tangents. on montre que chaque structure de solitons de Ricci naturel sur le fibré tangent induit une

structure de soliton de Ricci sur la variété de base, mettant l'accent sur le phénomène d'``hérédité'' de métriques g-naturelles. En se restreignant aux métriques g-naturelles qui sont combinaisons linéaires des trois relèvements classiques (Sasaki, horizontal et vertical) de la métrique de base à coefficients constant, on donne une caractérisation complète characterization des structures de solitons de Ricci sur le fibré tangent. on prouve, en particulier, que l'existence de telles structures requièrt la platitude de la variété de base, ce qui constitue une certaine rigidité de telles métriques. De plus, ceci nous garantit l'existence de structures de solitons de Ricci naturels non-triviaux sur le fibré tangent d'une variété Riemannienne.

D'autre part, on cherche des structures de solitons de Ricci naturels non-triviaux sur le fibré tangent unitaire d'une variété Riemannienne, muni d'une métrique de type Kaluza-Klein. On montre que, tandis que les solitons de Ricci déterminés par des relèvement tangentiels sont nécessairement triviaux (i.e. des variétés d'Einstein) en dimension arbitraire, les relèvements horizontaux de champs de vecteurs homothétiques sur une variété de base plate produisent des structures de solitons de Ricci naturels non-triviaux de type Kaluza-Klein. On donne aussi une caractérisation complète de solitons de Ricci de type Gradient et de type Kaluza-Klein. De plus, lorsque la variété de base est à courbure sectionnelle constante non necessairement plate, on montre que le relèvement complet lift au fibré tangent unitaire d'un champ de vecteurs homothétique non nul sur la variété de base est le champ de vecteurs potentiel d'une structure de soliton de Ricci non triviale sur le fibré tangent unitaire muni d'une métrique g-naturelle pseudo-Riemannienne de type Kaluza-Klein convenablement choisie. On donne aussi une classification complète des champs de vecteurs préservant les fibres sur le fibré tangent unitaire qui sont champs de vecteurs potentiels de structures de soliton de Ricci sur le fibré tangent unitaire muni d'une métrique g-naturelle pseudo-Riemannienne de type Kaluza-Klein.

Finalement, il est bon de noter que l'existence de structures de solitons de Ricci naturels sur les fibrés tangents et les fibrés tangent unitaires requière l'existence de champs de vecteurs homothétique sur la variété de base, ce qui présuppose certaines restrictions topologiques sur la variété de base.

Mots clés : Fibré tangent- Fibré tangent unitaire- métriques g-naturelles- trajectoires magnétiques- symétries- champs conformes- champs homothétiques- champs de Killing- soliton de Ricci.

ON THE GEOMETRY OF (UNIT) TANGENT BUNDLES OF RIEMANNIAN MANIFOLDS

Abstract:

It is undoubtedly true that the tangent bundle of a manifold plays a key role in differential geometry. It becomes an interesting Riemannian space when it is equipped with the Sasaki metric (the base manifold being then supposed Riemannian). In fact, Since the definition, by S. Sasaki, of a Riemannian metric on the tangent bundle to a Riemannian manifold, the geometry of tangent bundles had been extensively studied and analyzed by a lot of geometers. Using the concept of naturality and related notions, O. Kowalski and M. Sekizawa have given, in 1988, a classification of metrics (not necessarily pseudo-Riemannian) on tangent bundles of Riemannian (oriented) manifolds, obtained by natural transformations of Riemannian metrics on oriented manifolds into metrics on their tangent bundles. An analogous classification result had been given by I. {Kol\'{a}\~{r}}, P. W. Michor and J. Slov\'{a}k, when the orientation of the base manifold is not taken into account. The classification results had been then enhanced by M. T. K. Abbassi, who gave also a characterization of such metrics that he called g-natural metrics. It is worthwhile to note that g-natural metrics, thus obtained, depend on a fixed number (according to the dimension of the base manifold) of real functions defined on $\mathbb{R}_{+}$ (generating functions).\par

During the last two decades, a research dynamic in this field had been initiated leading to interesting works which shed light on some aspects of the geometry of tangent bundles endowed with g-natural metrics. The goal of this thesis is to discover other aspects by studying some geometrical properties of general g-natural metrics on the tangent bundle TM and the unit tangent bundle T_1M of a Riemannian manifold (M,g), in relation with those of the base metric. More precisely, we will be interested in three directions: magnetic trajectories on unit tangent bundles, infinitesimal symmetries on tangent and unit tangent bundles and Ricci soliton structures on tangent and unit tangent bundles.

As concerns magnetic trajectories, we had been motivated by two facts: firstly they are natural extensions of geodesics and secondly they have an intersting physical interpretation. Indeed, in Physics they are studied as the trajectories of charged particles moving on a Riemannian manifold (in particular the Euclidean 3-space) under the action of magnetic fields. To study magnetic curves, one needs a contact metric structure, and so we consider on the unit tangent bundle the so-called g-natural contact metric structures, and we call the corresponding magnetic trajectories contact magnetic trajectories. We obtain the differential equations satisfied by the contact magnetic trajectories. Then we emphasize the contact angle which is constant if and only if a certain conservation law is satisfied, case when these curves are known as slant

curves. When the base manifold is a space form $M(k)$ and the metric is of Kaluza-Klein type, the equations of magnetic trajectories are written in a simplified manner. We give then a complete classification of slant magnetic curves (respectively, geodesics) on $T_1M^2(k)$, when $M^2(k)$ is a two-dimensional Riemannian manifold of constant Gaussian curvature k. In particular, for a large class of pseudo-Riemannian Kaluza-Klein type metrics on $T_1M^2(k)$, we find that any slant magnetic normal curve projects onto a Riemannian circle (geodesic or not) on $M^2(k)$, and that if the metric on T_1M^2 is not Riemannian, then the slant magnetic curves project onto geodesics.

Many results are generalizations of those obtained by J. Inoguchi and M. I. Munteanu when the Sasaki metric and the compatible contact structure are considered. In particular, we give a generalization of a result of

Klingenberg and Sasaki on the 2-sphere, to 2-dimensional spheres of any radius, whose unit tangent bundle is endowed with an appropriate metric.

On the other hand, the study of symmetries is a well-known research topic in differential geometry with relevant physical interpretations. The study of symmetries on the tangent bundle and their relationship with symmetries of the base manifold is a natural field of research, which has been investigated in the case of the simplest metrics and symmetries on the tangent bundle. Killing vector fields of the tangent bundle equipped by the Sasaki metric and the Cheeger-Gromoll metric were classified respectively by S. Tanno and M. T. K. Abbassi and M. Sarih. Equipping the tangent bundle with an arbitrary g-natural metric makes the problem both much more difficult and intriguing. Some partial results on Killing vector fields with respect to a Riemannian g-natural metric were obtained in literature.

In the general context of detecting symmetries of the tangent bundle endowed with a Riemannian g-natural metric, a natural, more specific problem is to determine symmetries which are somewhat \lq\lq hereditary\rq\rq, in the sense that they are obtained as natural lifts to the tangent bundle of some symmetries of the base manifold.

Up to our knowledge, the only results in literature about conformal vector fields on the tangent bundle were given by E. Peyghan and A. Heydari, when the tangent bundle is endowed with some pseudo-Riemannian metrics, which are again a very special case of g-natural metrics.

In this work, we investigate fundamental symmetries of the tangent bundle, endowed with a pseudo-Riemannian g-natural metric, coming in a natural way from some vector fields and tensors defined on the base manifold. In particular, we completely characterize conformal, homothetic and Killing vector fields corresponding to either horizontal, vertical or complete lifts of vector fields of the base manifold. It is interesting to see how the existence of some of these symmetries is reserved to some g-natural metrics which are not Riemannian, emphasizing different behaviours between Riemannian and pseudo-Riemannian geometries on the tangent bundle.

Concerning the unit tangent bundle of a Riemannian manifold, equipped with the Sasaki metric, T. Konno succeeded to give a classification of fiber-preserving Killing vector fields and a full classification of Killing vector fields in the case when the base manifold is three-dimensional. At the best of our knowledge, conformal vector fields on unit tangent bundles had not been studied yet, even in the case of the Sasaki metric.

In this thesis, we are interested in the study of conformal/Killing vector fields on the unit tangent bundle equipped with an arbitrary pseudo-Riemannian g-natural metric. However, it turns out that it is difficult to give a full classification of conformal or Killing vector fields on the unit tangent bundle, endowed with an arbitrary pseudo-Riemannian g-natural metric. Hence, we had focused on three questions:

- to give necessary conditions for horizontal, tangential and complete lifts of a vector field to the unit tangent bundle to be conformal or Killing;

- to find a full classification of fiber-preserving conformal vector fields on the unit tangent bundle, endowed with a Kaluza-Klein type metric;

- to find some examples of non-fiber preserving conformal or Killing vector fields on the unit tangent bundle, endowed with a Kaluza-Klein type metric.

Finally, Ricci solitons have been intensively studied in many contexts and from many points of view. In this thesis, we are interested in \emph{natural Ricci soliton} structures on tangent and unit tangent bundles of Riemannian manifolds, i.e. those associated with pseudo-Riemannian g-natural metrics. Our purpose is

twofold. On one hand, we investigate natural Ricci soliton structures on tangent bundles of Riemannian manifolds. We prove that every natural Ricci soliton structure on the tangent bundle gives rise to a Ricci soliton structure on the base manifold, confirming the ``heridity" phenomenon of g-natural metrics. Restricting ourselves to g-natural metrics which are linear combinations of the three classical lifts (Sasaki, horizontal and vertical) of the base metric with constant coefficients, we give a complete characterization of Ricci soliton structures on the tangent bundle. We prove, in particular, that the existence of such structures requires the flatness of the base manifold, which constitutes a kind of rigidity of such metrics. Furthermore, this ensures the existence of non-trivial natural Ricci soliton structures on the tangent bundle of a Riemannian manifold.

On the other hand, we are looking for nontrivial natural Ricci solitons structures on the unit tangent bundle endowed with a Kaluza-Klein type metric. We prove that, while Ricci solitons determined by tangential lifts remain trivial (i.e. an Einstein manifold) in arbitrary dimension, horizontal lifts of vector fields related to the geometry of flat base manifold (namely, homothetic vector fields) produce nontrivial Ricci solitons metrics of Kaluza-Klein type. We also give a complete characterization of Gradient Ricci solitons of Kaluza-Klein type. Furthermore, when the base manifold is of constant sectional curvature which is not necessarily zero, we prove that the complete lift to the unit tangent bundle of a non-zero homothetic vector field on the base manifold is the potential vector field of a non trivial Ricci soliton structure on the unit tangent bundle endowed with an appropriately chosen pseudo-Riemannian Kaluza-Klein type metric. We also give a complete classification of fiber-preserving vector fields on the unit tangent bundle which are the potential vector fields of Ricci soliton structures on the unit tangent bundle endowed with a pseudo-Riemannian Kaluza-Klein type metric.

Finally, it is worth mentioning that the existence of natural Ricci soliton structures either on tangent bundles or on unit tangent bundles requires the existence of non-zero homothetic vector fields on the base manifold, which could presuppose some topological restrictions to the base manifold.

Key Words: Tangent bundle- unit tangent bundle- g-natural metric- magnetic trajectories - symmetries- conformal vector fields- homothetic vector field- Killing vector fields- Ricci soliton.