



## Résumé :

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux problèmes de préservation. Dans une formulation générale, ceci consiste à caractériser des applications entre deux algèbres de Banach, qui laissent une certaine propriété, une relation, ou même un sous-ensemble invariant. Nous commençons par déterminer la forme des applications  $\Phi: B(X) \rightarrow B(X)$  satisfaisant

$$\{\Phi(A) \Delta \Phi(B)\}' = \{A \Delta B\}' \text{ pour tout } A, B \in B(X).$$

Où  $\Delta$  est l'une des opérations binaires à savoir le triple produit  $ABA$  et le produit de Jordan  $AB+BA$ .  $\{A\}'$  désignant le commutant de  $A$ . Ensuite, nous caractérisons les applications additives qui compressent ou élargissent le pseudo spectre d'un élément dans  $B(X)$ . Nous caractérisons également les applications de  $B(X)$  sur lui-même préservant le pseudo spectre des produits généralisés des opérateurs, où  $X$  désigne un espace de Banach complexe. Soit  $A \in B(H)$  et  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\Lambda_\varepsilon(A)$  représente le spectre conditionné de  $A$ . La forme des applications  $\Phi$  de  $B(H)$  sur lui-même satisfaisant

$$\Lambda_\varepsilon(\Phi(A) \Phi(B)^* \Phi(A)) = \Lambda_\varepsilon(AB^*A) \text{ pour tout } A, B \in B(H),$$

a également été établi. Nous obtenons également la description des applications surjectives sur  $B(X)$  satisfaisant

$$\dim F(\Phi(A_1) * \dots * \Phi(A_k)) = \dim F(A_1 * \dots * A_k) \text{ pour tout } A_1, \dots, A_k \in B(X).$$

$A_1 * \dots * A_k$  représente le produit généralisé et  $F(A)$  désigne l'ensemble des points fixe de  $A$ . Nous terminons par caractériser la forme de toutes les applications surjectives unitaires de  $B(X)$  sur lui-même préservant la dimension du sous-espace spectral locale associée au singleton  $\{1\}$  du produit de deux opérateurs. De plus, nous caractérisons les applications surjectives de  $B(X)$  sur lui-même préservant le sous-espace spectral locale associée au singleton  $\{1\}$  du produit de deux opérateurs.

## Mots clés :

Problèmes de préservation, algèbres de Banach, théorie des opérateurs, spectre, spectre local, commutant, pseudo spectre, spectre conditionné, sous-espace spectral local, points fixe.

## PRESERVATIONS NOT NECESSARILY ADDITIVE OF SOME PARTS OF $\mathbb{C}$ , $X$ OR $B(X)$ AS WELL AS THE DIMENSION

### Abstract :

In this thesis, we are interested in the problems of preservation. In a general formulation, this consists in characterizing applications between two Banach algebras, which leave a certain property, a relation, or even an invariant subset. We begin by determining the form of applications  $\Phi: B(X) \rightarrow B(X)$  satisfying

$$\{\Phi(A) \Delta \Phi(B)\}' = \{A \Delta B\}' \text{ for all } A, B \in B(X),$$

where  $\Delta$  is one of the binary operations namely the triple  $ABA$  product and the Jordan  $AB+BA$  product.  $\{A\}'$  designating the switch of  $A$ . Next, we characterize additive applications that compress or expand the pseudo specter of an element in  $B(X)$ . We also characterize the applications of  $B(X)$  on itself preserving the pseudospectrum of the generalized products of the operators, where  $X$  stands for a complex Banach space. Let  $A \in B(H)$  and  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\Lambda_\varepsilon(A)$  design the condition spectrum of  $A$ . The form applications  $\Phi$  on  $B(H)$  satisfying

$$\Lambda_\varepsilon(\Phi(A) \Phi(B)^* \Phi(A)) = \Lambda_\varepsilon(AB^*A) \text{ for all } A, B \in B(H),$$

has also been established. We also obtain the description of surjective maps on  $B(X)$  satisfying

$$\dim F(\Phi(A_1) * \dots * \Phi(A_k)) = \dim F(A_1 * \dots * A_k) \text{ pour tout } A_1, \dots, A_k \in B(X).$$

$A_1 * \dots * A_k$  represents the generalized product and  $F(A)$  design the set of fixed points of  $A$ .

Finally, we characterize the form of all unitary maps on  $B(X)$  preserving the dimension of the local spectral subspaces associated with the singleton  $\{1\}$  of the product of two operators. In addition, we characterize the form of maps on  $B(X)$  preserving the local spectral subspaces associated with the singleton  $\{1\}$  of the product of two operators.

### Key Words :

reservation problems, Banach algebra, operators theory, spectra, local spectra, commutant, pseudospectrum, condition spectrum, local spectral subspace, fixed points.