UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ
FES

AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **: ELMASSOUDI M' Hamed**

Soutiendra **: le 22/06/2019** à **10h**

une thèse intitulée :

Etude de quelques problèmes non linéaires dans les espaces d'Orlicz et de Musielak - Orlicz

En vue d'obtenir le Doctorat

FD : Mathématiques et Applications (MA)
Spécialité: Equations aux dérivées partielles (EDP)

Devant le jury composé comme suit :

	NOM ET PRENOM	GRADE	ETABLISSEMENT
Président	Pr. TOUZANI Abdelfattah	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
Directeur de thèse	Pr. BENNOUNA Jaouad	PES	Faculté des Sciences Dhar ElMahraz - Fès
Rapporteurs	Pr. BENKIRANE Abdelmoujib	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
	Pr. SEAID Mohammed	PES	Université Durham - Grade Bretagne
	Pr. TSOULI Najib	PES	Faculté des Sciences - Oujda
Membres	Pr. ABDOU Ahmed	PES	Faculté des Sciences - Oujda
	Pr. AKDIM Youssef	PES	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz - Fès
	Pr. AZROUL Elhoussine	PES	Faculté des Sciences Dhar ElMahraz - Fès
	Pr. YOUSFI Ahmed	PES	ENSA-USMBA
Invité	Pr.ABERQI Ahmed	PA	ENSA-USMBA

Résumé :

Ce travail porte sur des résultats d'existence et parfois d'unicité pour des problèmes non linéaires de type Dirichlet dans des espaces modulaires non réflexifs à savoir les espaces d'Orlicz-Sobolev et les Musielak-Sobolev. La thèse se décompose en trois parties:

Dans la première partie, nous donnons brièvement quelques rappels sur les espaces d'Orlicz-Sobolev, puis on étudie l'existence de solutions entropiques pour des problèmes unilatéraux associés à l'équation elliptique non linéaire de type

$$-div(a(\mathrm{x},\mathrm{u},\nabla u))+\mathrm{K}(x,u,\nabla u))=\mu,+div\big(\Phi(x,u)\big)\ dans\ \Omega,$$

où $div(a(x,u,\nabla u))$ est un opérateur du type Leray-Lions, $K(x,u,\nabla u)$ est un terme non linéaire d'ordre inférieur vérifiant seulement la condition de croissance et F est une fonction de Carathéodory qui ne satisfait pas la condition de coercivité. Le problème est traité dans le cas non variationnel où le terme source m est une mesure de la forme $\mu=f-div(F)$ avec $f\in L^1(\Omega)$, $F\in(E_{\overline{M}}(\Omega))^N$ et $\overline{M}$ est la fonction complémentaire de la N-fonction M.

Nous nous intéressons aussi aux équations paraboliques non linéaires de type

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t}-div\big(a(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u},\nabla u)+\Phi(x,t,u)\big)=f\ dans\ Q_T,$$

où b est une fonction strictement croissante tel que $b\in \mathrm{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et le terme source f appartient à $L^1(Q_T)$. On démontre d'abord l'existence de la solution renormalisée de l'équation, puis en imposant des conditions appropriées sur les termes b, a, et F on démontre l'unicité de cette solution.

Dans la seconde partie, on donne un préliminaire concernant les espaces de Musielak-Orlicz-Sobolev ainsi que des Lemmes et Théorèmes utiles pour la suite de la partie. Puis on cherche à établir des résultats d'existence de solutions des problèmes elliptiques non linéaires de type

$$-div\big(a(\mathrm{x},\mathrm{u},\nabla u)+\mathrm{K}(x,u,\nabla u)\big)=\mu,$$

où μ est une mesure de Radon bornée. On introduit deux Lemmes principales, afin de prouver que pour toute fonction P de A_M (voir Définition 3.1.1), la solution u de l'équation appartient à l'espace de Musielak $W_0^1L_P(\Omega)$.

On finit cette partie par un chapitre qui serait dédié à l'étude des problèmes paraboliques non linéaires avec obstacle de type

$$\begin{cases} u\geq\zeta & dans\ Q_T,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+div(a(x,t,u,\nabla u))+K(x,t,u,\nabla u)=f-div\big(\Phi(x,t,u)\big) & dans\ \ Q_T,\\ u(x,t)=0 & sur\ \ \partial\Omega\times(0,T),\\ u(x,t=0)=u_0(x) & dans\ \ \Omega.\end{cases}$$

La donnée f est un élément de $L^1(Q_T)$, le terme Φ vérifie une condition de croissance non

polynômiale. Nous prouvons l'existence de solutions en utilisant la technique de troncature, des fonctions tests adéquats et la méthode de pénalisation.

Enfin, dans la dernière partie, nous retournons au cadre des espaces d'Orlicz-Sobolev pour étudier l'existence et l'unicité de la solution numérique des problèmes paraboliques non linéaires associés au schéma numérique suivant:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{b(u^n)-b(u^{n-1})}{\tau}\right)v+a(\nabla u^n)\nabla v+\Phi(u^n)\nabla v\right]dx=\int_{\Omega}f(.,t_n)vdx\,,\forall v\in V,$$

Où $\{u^n\}_1^N \subset V=\left\{v\in L^1(\Omega):\nabla u\in\left(E_M(\Omega)\right)^N,\gamma_0 u=0\right\}$.

On prouve d'abord l'existence d'une solution unique de l'équation sous certaines conditions sur ces termes, puis on démontre la convergence de la solution numérique vers la solution exacte de l'équation:

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t}-div\big(a(\nabla u)+\Phi(u)\big)=f.$$

Ensuite on détermine l'estimation de l'erreur de la semi-discrétisation temporelle et on finit par une simulation numérique d'un exemple.

Mots clés :

Espace d'Orlicz-Sobolev, espace de Musielak-Sobolev, non réflexive, non coercive, donnée mesure, problème elliptique et parabolique, solution entropique et renormalisée, pénalisation, troncature, solution numérique, existence, unicité, illustration numérique.

STUDY OF SOME NONLINEAR PROBLEMS IN THE ORLICZ AND MUSIELAK-ORLICZ SPACES.

Abstract :

This work focuses on the results of existence and sometimes uniqueness for non-linear Dirichlet type problems in non-reflective modular spaces, namely the Orlicz-Sobolev spaces and the Musielak-Sobolev. the thesis is divided into three parts:

In the first part, we briefly give some reminders about the spaces of Orlicz-Sobolev, and then the existence of entropic solutions for associated unilateral problems is studied to the non-linear elliptical equation of the type

$$-div\big(a(\mathrm{x},\mathrm{u},\nabla u)+\mathrm{K}(x,u,\nabla u)\big)=\mu,+div\big(\Phi(x,u)\big)\ dans\ \Omega,$$

where $div(a(x,u,\nabla u))$ is an operator of the Leray-Lions type, $K(x,u,\nabla u)$ is a non-linear term of order checking only the growth condition and is a Carathéodory function that does not meet the condition of coercivity. The problem is addressed in the non-changing case where the source term m is a measure of the form $\mu=f-div(F)$ with $f\in L^1(\Omega)$, $F\in(E_{\overline{M}}(\Omega))^N$ and $\overline{M}$ is the complementary function of the N-function M.

We are also interested in non-linear parabolic equations of the type

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t}-div\big(a(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u},\nabla u)+\Phi(x,t,u)\big)=f\ dans\ Q_T,$$

where b is a strictly increasing function such that $b \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ and the source term f belong to $L^1(Q_T)$. First, the existence of the renormalized solution of the equation is proved, then by imposing appropriate conditions on terms a, b, and F, we attest the uniqueness of this solution.

In the second part, we give a preliminary overview of the Musielak-Orlicz-Sobolev spaces as well as useful Lemmas and Theorems for the rest of the game. Then seeks to establish the results of the existence of solutions to non-linear elliptical problems of the type

$$-div\big(a(\mathrm{x},\mathrm{u},\nabla u) + \mathrm{K}(x,u,\nabla u)\big) = \mu,$$

or μ is a bounded Radon measurement. We introduce two main Lemmas and their demonstrations, which will make it easier to prove that for any function P of A_M function (see definition 3.1.1), the solution u of equation belongs to the Musielak space $W_0^1 L_P(\Omega)$.

We end this part with a chapter that would be dedicated to the study of non-linear parabolic problems with obstacles of type

$$\begin{cases} u \geq \zeta & dans\ Q_T \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + div(a(x,t,u,\nabla u) + K(x,t,u,\nabla u) = f - div\big(\Phi(x,t,u)\big) & dans\ \ Q_T, \\ u(x,t) = 0 & sur\ \ \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,t=0) = u_0(x) & dans\ \ \Omega. \end{cases}$$

The data f is an element of $L^1(Q_T)$, the term Φ verifies a non-polynomial growth condition. We prove the existence of solutions using the truncation technique, appropriate test functions and the penalty method.

Finally, in the last part, we return to the framework of the Orlicz-Sobolev spaces to study the existence and uniqueness of the numerical solution of non-linear parabolic problems associated with the following numerical scheme:

$$\int_\Omega \left[\Big(\frac{b(u^n) - b(u^{n-1})}{\tau}\Big) v + a(\nabla u^n)\nabla v + \Phi(u^n)\nabla v \right] dx = \int_\Omega f(.,t_n) v dx\,, \forall v \in V,$$

where $\{u^n\}_1^N \subset V = \left\{ v \in L^1(\Omega) : \nabla u \in \big(E_M(\Omega)\big)^N, \gamma_0 u = 0 \right\}$.

First, we prove the existence of a single solution of equation under certain conditions on its terms, then we demonstrate the convergence of the numerical solution towards the exact solution of the equation:

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t} - div\big(a(\nabla u) + \Phi(u)\big) = f.$$

Then we determine the estimate of the error of the temporal semi-discretization and we end up with a numerical simulation of an example.

Key Words :

Orlicz-Sobolev space, Musielak-Sobolev space, non-reflective, non-coercive, measure

data, elliptical and parabolic problem, entropy and renormalized solution, penalization, truncation, numerical solution, existence, uniqueness, numerical illustration