جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES
كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ FES

CENTRE D'ETUDES DOCTORALES
«SCIENCES ET TECHNIQUES ET
SCIENCES MÉDICALES »

مركز الدكتوراه « العلوم والتقنيات
والعلوم الطبية»

AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **EL IDRISSI Rachid**
Soutiendra : **le Samedi 06/12/2025** à **10H00**
Lieu : **FSDM –** ***Centre Visioconférence***

Une thèse intitulée :

Advanced Optimality Conditions for Hierarchical Systems : Theory and Applications in Bilevel Optimization, Nash Games, and Optimal Control

En vue d'obtenir le ***Doctorat***

FD : ***Sciences et Techniques***
Spécialité : **Optimisation et Recherche Opérationnelle**

Devant le jury composé comme suit :

Nom et prénom	**Etablissement**	**Grade**	**Qualité**
AZROUL Elhoussine	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Président
AIT MANSOUR Mohamed	Faculté Polydisciplinaire, Safi	PES	Rapporteur
KHAZARI Adil	École Nationale de Commerce et de Gestion, Fès	MCH	Rapporteur
SERHANI Mustapha	Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales, Meknès	PES	Rapporteur
KALMOUN El Mostafa	École des sciences et de l'ingénierie, Université Al Akhawayn, Ifrane	PES	Examinateur
KHARBACH Jaouad	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PES	Examinateur
LAFHIM Lahoussine	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	MCH	Directeur de thèse
OUAKRIM Youssef	École Normale Supérieure, Fès	MCH	Invité

Résumé :

Cette thèse est consacrée au développement des conditions nécessaires d'optimalité pour des classes structurées de problèmes d'optimisation issus de la prise de décision hiérarchique, de la modélisation d'équilibres, et du contrôle optimal. Elle combine l'analyse théorique, le développement algorithmique et les simulations numériques pour traiter les programmes à deux niveaux, les problèmes d'équilibre de Nash généralisés multiobjectifs (MGNEPs), ainsi que les modèles de contrôle optimal.

La première partie de la thèse est centrée sur les conditions d'optimalité de type Karush-Kuhn-Tucker Approchées (AKKT), qui constituent une classe raffinée de conditions nécessaires n'exigeant aucune qualification de contrainte, ce qui les rendent particulièrement adaptées aux problèmes non lisses. Nous étendons le cadre AKKT aux problèmes de programmation à deux niveaux non lisses en nous appuyant sur une reformulation via la fonction marginale. Nous démontrons que tout point satisfaisant les conditions KKT classiques satisfait aussi les conditions AKKT, et nous identifions les situations où la réciproque est également vraie. Une application concrète à la planification des investissements dans les énergies renouvelables illustre la pertinence des conditions proposées.

Nous étudions ensuite les MGNEPs, pour lesquels nous introduisons deux nouveaux cadres de conditions d'optimalité : les conditions standard-ASKKT (Approximate Strong KKT) et une variante spécifique, à savoir les conditions MGNEP-ASKKT. Bien que toute solution efficace satisfasse les conditions standard-ASKKT, celles-ci sont souvent trop strictes pour les suites générées par des algorithmes numériques. Pour pallier cette limite, nous introduisons les conditions MGNEP-ASKKT, qui; bien que plus souples; ne constituent pas de véritables conditions d'optimalité et sont indépendantes des conditions standard-ASKKT. Cette indépendance implique que des algorithmes générant des suites MGNEP-ASKKT peuvent converger vers des points non optimaux. Pour garantir une convergence vers des solutions significatives, nous proposons une condition de régularité dite MGNEP-cone continuity regularity, qui assure la convergence vers des points MGNEP-SKKT. Dans ce cadre, nous concevons un algorithme de type Lagrangien augmenté pour résoudre les MGNEPs sans recours à la scalarisation, puis nous démontrons sa faisabilité ainsi que sa convergence, à la fois théoriquement et numériquement.

La seconde partie de la thèse est consacrée aux conditions d'optimalité de type Pontryagin pour des problèmes de contrôle optimal à deux niveaux, dans lesquels le niveau supérieur est soumis à des contraintes d'état pures, tandis que le niveau inférieur est défini par des inégalités variationnelles (VIs) ou quasi-variationnelles (QVIs), toutes deux dépendant de l'état final du système dynamique. Dans le cas des VIs, nous utilisons une approche via la fonction gap pour reformuler le problème à deux niveaux en un problème de contrôle à un seul niveau. Par suite, nous déduisant les conditions d'optimalité non dégénérées sous des hypothèses de régularité appropriées. Ce cadre est appliqué à un modèle de gestion du gaz naturel. Dans le cas des QVIs, nous proposons une reformulation fondée sur la fonction marginale, toute en introduisons une pénalisation exacte, et en établissant des conditions de type Pontryagin adaptées à cette configuration hautement non convexe et implicite.

Dans l'ensemble, ce travail propose des fondations théoriques solides, accompagnées d'outils algorithmiques et de stratégies de résolution pour des problèmes d'optimisation non lisses, à savoir hiérarchiques, d'équilibre de Nash, et dynamiques. Les expériences numériques et les applications à des systèmes énergétiques et à la prise de décision

dynamique confirment l'efficacité des approches proposées dans cette thèse. Ces résultats ouvrent également de nombreuses perspectives de recherche, notamment l'extension aux systèmes stochastiques, aux dynamiques à retard, aux modèles à deux niveaux avec contraintes d'équilibre multiobjectif, et aux problèmes de contrôle optimal comportant des contraintes mixtes état-contrôle.

Mots clés :
Optimisation à deux niveaux; Optimisation multiobjectif; Problèmes d'équilibre de Nash; Problèmes de contrôle optimal; Inégalité variationnelle; Inégalité quasi-variationnelle; Conditions de type Karush-Kuhn-Tucker Approchées; Principe du maximum; Fonction valeur; Conditions de type Pontryagin.

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES
كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ FES

CENTRE D'ETUDES DOCTORALES «SCIENCES ET TECHNIQUES ET SCIENCES MÉDICALES »

مركز الدكتوراه « العلوم والتقنيات والعلوم الطبية»

Advanced Optimality Conditions for Hierarchical Systems : Theory and Applications in Bilevel Optimization, Nash Games, and Optimal Control

Abstract:

This thesis is devoted to the development of necessary optimality conditions for structured classes of optimization problems arising in hierarchical decision-making, equilibrium modeling, and optimal control problems. It combines theoretical analysis, algorithmic development, and numerical simulations to address bilevel programs, multiobjective generalized Nash equilibrium problems (MGNEPs), and optimal control models.

The first part of the thesis focuses on Approximate Karush-Kuhn-Tucker (AKKT) conditions, a refined class of necessary conditions that hold without requiring constraint qualifications, making them suitable for nonsmooth optimization problems. We extend the AKKT framework to nonsmooth bilevel programming problems by leveraging the optimal value reformulation. We establish that Karush-Kuhn-Tucker points satisfy AKKT conditions and identify cases where the converse holds. A practical application to renewable energy investment planning illustrates the utility of the proposed conditions. Next, we study MGNEPs, introducing two new optimality frameworks: the standard-approximate strong KKT (standard-ASKKT) conditions and a tailored variant, MGNEP-approximate strong optimality conditions (MGNEP-ASKKT). We show that while every efficient solution satisfies the standard-ASKKT conditions, these are often too restrictive for sequences produced by numerical algorithms. To address this, we introduce the MGNEP-ASKKT concept, which, although more flexible, does not qualify as true optimality conditions and is independent of the standard-ASKKT. This disconnect implies that MGNEP-ASKKT sequences may converge to non-optimal points. To ensure convergence to meaningful solutions, we propose the MGNEP-cone continuity regularity condition, which guarantees convergence to MGNEP-SKKT points. Based on this framework, we design an augmented Lagrangian algorithm for solving MGNEPs without scalarization and demonstrate its feasibility and convergence through theoretical results and numerical experiments.

The second part of the thesis is devoted to Pontryagin-type optimality conditions for bilevel optimal control problems with pure state constraints at the upper level and variational or quasi-variational inequalities (VIs or QVIs) at the lower level, both of which depend on the final state of the dynamic system. For the case involving VIs, we employ a gap function approach to transform the bilevel problem into a single-level control problem and derive non-degenerate optimality conditions under suitable regularity assumptions. The framework is applied to a natural gas cash-out model. In the QVI case, we develop a value function-based reformulation, introduce exact penalization, and derive Pontryagin-type conditions tailored to this highly nonconvex and implicit setting.

Overall, this work provides theoretical foundations, along with algorithmic tools and computational strategies, for addressing nonsmooth, hierarchical, Nash equilibrium game, and dynamic optimization problems. Numerical experiments and applications in energy systems and dynamic decision-making highlight the practical effectiveness of the

proposed approaches. The findings also open promising directions for future research, including extensions to stochastic settings, time-delay systems, bilevel models with multiobjective equilibrium constraints, and optimal control problems involving mixed state-control constraints.

Key Words:
Bilevel optimization; Multiobjective optimization; Nash equilibrium problems; Optimal control problems; Variational inequality, Quasi-variational inequality; Approximate KKT conditions; Maximum principle Value function; Pontryagin optimality conditions.