



## AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **HADJI Soufiane**

Soutiendra : le **Samedi 22/07/2023 à 10H00**

Lieu : **Centre des Etudes Doctorales - USMBA - Amphi 2**

Une thèse intitulée :

### **On the Common Spectral Properties for Product Operators and for Limits of the $\nu$ -Convergence**

En vue d'obtenir le **Doctorat**

FD : **Mathématiques et Applications**

Spécialité : **Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale**

Devant le jury composé comme suit :

Nom et prénom	Etablissement	Grade	Qualité
Pr ECH-CHERIF EL KETTANI Mostapha	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PES	Président
Pr BENBOUZIANE Hassane	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PH	Rapporteur & Examineur
Pr ELHODAIBI Mhamed	Faculté des Sciences, Oujda	PES	Rapporteur & Examineur
Pr ZARIOUH Hassan	Centre Régional Des Métiers De L'Éducation Et De La Formation, Oujda	PES	Rapporteur & Examineur
Pr CHOULLI Hanan	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PH	Examineur
Pr EL AMRANI Abdelkhalek	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PH	Examineur
Pr LAFHIM Lahoussine	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PH	Examineur
Pr OUDGHIRI Mourad	Faculté des Sciences, Oujda	PES	Examineur
Pr OUZAHRA Mohamed	Ecole Normale Supérieure, Fès	PES	Examineur
Pr ZGUITTI Hassane	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PES	Directeur de thèse



## Résumé :

Cette thèse s'articule autour de deux axes principaux :

Le premier axe vise à traiter les propriétés spectrales communes de deux opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach. Nous commençons par étudier les propriétés spectrales communes locales de deux opérateurs linéaires bornés  $A$  et  $B$  satisfaisant  $A^{k+1} = A^k B^k A^k$  et  $B^{k+1} = B^k A^k B^k$ , pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ , en montrant que  $A$ ,  $B$ ,  $A^k B^k$  et  $B^k A^k$  ont la même propriété d'extension unique (SVEP), la propriété de Bishop ( $\beta$ ), la propriété ( $\beta_\varepsilon$ ), la propriété de décomposition ( $\delta$ ) et la décomposabilité. On étudie également la fermeture du coeur analytique et la partie quasinilpotente puis la propriété de Dunford ( $C$ ) et la propriété ( $Q$ ).

Ensuite, sous les conditions  $BAC = BDB$  et  $CDB = CAC$ , nous étudions les propriétés spectrales communes pour les opérateurs  $AC$  et  $BD$  et nous montrons que le lemme de Jacobson est valable pour différents spectres issus de régularités et pour d'autres parties du spectre. De plus, nous montrons que  $I-AC$  est Drazin-Riesz inversible généralisé si et seulement si  $I-BD$  est Drazin-Riesz inversible généralisé. Nous répondons donc positivement à une question posée par Yan et al. [95, Question 4.9]. Nous montrons aussi, et avec deux méthodes différentes, le lemme de Jacobson pour les inverses au sens de Drazin-Riesz généralisé.

Dans le deuxième axe, nous nous intéressons à la notion de  $\nu$ -convergence (au sens de Ahues). Etant donné  $T$  et  $U$  deux  $\nu$ -limites différentes d'une suite d'opérateurs  $(T_n)$ , nous montrons que  $T$  et  $U$  possèdent des propriétés spectrales communes. En particulier, nous généralisons des résultats connus dans ce sens. Nous donnons également des conditions suffisantes qui assurent la  $\nu$ -continuité spectrale du spectre surjectif.

## Mots clés :

Lemme de Jacobson, propriétés spectrales communes, Formule de Cline, théorie spectrale locale, opérateurs Drazin-Riesz inversibles généralisés, régularité,  $\nu$ -convergence,  $\nu$ -continuité.



## On the Common Spectral Properties for Product Operators and for Limits of the $\nu$ -Convergence

### Abstract :

This thesis covers two main axes:

The first one seeks to treat common spectral properties for two Banach bounded linear operators.

We begin by investigating the local common spectral properties of two Banach bounded linear operators  $A$  and  $B$  satisfying assumption satisfaisant  $A^{k+1} = A^k B^k A^k$  and  $B^{k+1} = B^k A^k B^k$  for some  $k \in \mathbb{N}$ , by showing that  $A$ ,  $B$ ,  $A^k B^k$  et  $B^k A^k$  share the single valued extension property, the Bishop property  $\beta$ , the property  $\beta_\varepsilon$ , the decomposition property  $\delta$  and decomposability. In addition, the closedness of analytic core, the quasinilpotent part then the Dunford's property (C) and the property (Q) are studied.

Next, under conditions  $B A C = B D B$  and  $C D B = C A C$  we investigate common spectral proprieties for operators  $AC$  and  $BD$  and we show that Jacobson's Lemma hold for different spectra originated by regularities and for other parts of the spectrum. Further, we examine to prove that for bounded linear operators  $A, B, C$ , and  $D$  on a Banach space  $X$ ,  $I-AC$  is generalized Drazin-Riesz invertible if and only if  $I-BD$  is generalized Drazin-Riesz invertible. Therefore, we give a positive answer to a question posed by Yan et al [95, Question 4.9]. We also show, with two different methods, the Jacobson lemma for inverses in the generalised Drazin-Riesz sense.

On the second one, we deal with the notion of  $\nu$ -convergence (in sens of M. Ahues ), given  $T$  and  $U$  as two different  $\nu$ -limits of a sequence of operators  $(T_n)$ , we show that  $T$  and  $U$  have common spectral properties. In particular, we generalise known results in this sense. We also give sufficient conditions that ensure the spectral  $\nu$ -continuity of the surjective spectrum.

### Key Words :

Jacobson's lemma, Common spectral properties, Cline's Formula, local spectral theory, Generalized Drazin-Riesz operators, regularity,  $\nu$ -convergence,  $\nu$ -continuity.