



## AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **ABAD Othman**

Soutiendra : le **Samedi 04/11/2023 à 10H00**

Lieu : **FSDM – Département de Géologie**

Une thèse intitulée :

**On the extension of generalized Drazin-Riesz invertible operators  
and their applications**

En vue d'obtenir le **Doctorat**

FD : **Mathématiques et Applications**

Spécialité : **Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale**

Devant le jury composé comme suit :

Nom et prénom	Etablissement	Grade	Qualité
Pr ECH-CHERIF EL KETTANI Mustapha	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PES	Président
Pr AMOUCH Mohamed	Faculté des Sciences, El Jadida	PES	Rapporteur & Examineur
Pr EL AMRANI Abdelkhalek	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PH	Rapporteur & Examineur
Pr OUDGHIRI Mourad	Faculté des Sciences, Oujda	PES	Rapporteur & Examineur
Pr BENBOUZIANE Hassane	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PH	Examineur
Pr BOUA Hamid	Faculté Pluridisciplinaire, Nador	PH	Examineur
Pr EL HODAIBI M'hamed	Faculté des Sciences, Oujda	PES	Examineur
Pr LAFHIM Lahoussine	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PH	Examineur
Pr ZGUITTI Hassane	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PES	Directeur de thèse



## Résumé :

L'objectif ultime de cette thèse consiste à comprendre de façon plus poussée, les fondements et propriétés de l'inversibilité généralisée au sens de Drazin-Riesz introduite par S. C. Zivkovic-Zlatanovic et M. D. Cvetkovic en 2017. Pour se faire, nous nous sommes focalisés sur les propriétés algébriques, spectrales et analytiques de l'inversibilité généralisée au sens de Drazin-Riesz. En premier lieu, dans le cadre des opérateurs bornés, nous avons pu construire un pont entre les inverses de Drazin reliés à une partie spectrale contenant zéro et l'opérateur Drazin-Riesz inversibles, ce qui génère une classe d'inverses Drazin-Riesz généralisés reliés aux parties spectrales contenant des points de Riesz et zéro du spectre de l'opérateur Drazin-Riesz inversible généralisé, ceci nous permet de régir une caractérisation plus commode et pratique qui postule que l'inversibilité généralisée au sens de Drazin-Riesz d'un opérateur borné est vérifiée si et seulement si 0 n'est pas un point d'accumulation du spectre Browder de cet opérateur, cette dernière est une clé majeure pour démontrer la régularité de la classe des opérateurs Drazin-Riesz inversibles généralisés bornés.

Tous ces résultats sont par la suite transmis dans le cadre des algèbres de Banach semi-simples tout en ajoutant des résultats traitant la formule de la résolvante généralisée de deux éléments qui sont Drazin-Riesz inversibles généralisés. Aussi, dans le cas des algèbres de Banach quelconques, plusieurs caractérisations de l'unicité des inverses Drazin T-Riesz sont établies (les inverses Drazin T-Riesz sont une généralisation introduite par S. C. Zivkovic-Zlatanovic en 2023).

Hormis la régularité au sens de Kordula et Müller, qui est une notion valide dans le cadre des algèbres de Banach, nous avons généralisé la notion des inverses Drazin-Riesz avec tous les résultats trouvés dans le cadre des opérateurs bornés au contexte des opérateurs fermés, et ainsi acheminer la liaison de ce type d'inversibilité généralisée avec la théorie des  $C_0$ -semigroupes.

Comme applications, dans le cadre des opérateurs bornés agissant sur un espace de Hilbert, nous proposons une solution pour les équations singulières abstraites en utilisant l'inversibilité généralisée au sens de Drazin-Riesz, en tenant compte de la décomposition de West. Aussi, dans le cadre des opérateurs fermés, nous proposons une solution pour les équations différentielles abstraites de second ordre dans le cadre des espaces de Banach, cette solution est construite via l'usage des  $C_0$ -semigroupes ayant comme générateurs infinitésimaux des opérateurs Drazin-Riesz inversibles généralisés fermés.

## Mots clés :

Element de Riesz, Théorie de Fredholm, opérateurs Drazin-Riesz inversibles généralisés,  $C_0$ -semigroupes, régularité.



## On the extension of generalized Drazin-Riesz invertible operators and their applications

### Abstract :

The ultimate objective of this thesis is to understand in a more thorough way, the foundations and properties of the generalized invertibility in the sense of Drazin-Riesz incepted by S. C. Zivkovic-Zlatanovic and M. D. Cvetkovic in 2017. To do so, we focus on the algebraic, spectral and analytical properties of generalized Drazin-Riesz invertibility. Firstly, in the context of bounded operators, we build a bridge between the Drazin inverses related to a spectral set containing zero and the generalized Drazin-Riesz invertible operator, which generate a class of generalized Drazin-Riesz inverses related to the spectral sets containing zero and Riesz points of the concerned generalized Drazin-Riesz invertible operator. The latter allows us to provide a more convenient and practical characterization postulating that in order to validate the generalized invertibility in the sense of Drazin-Riesz, the condition that 0 is not an accumulation point of the Browder spectrum of the concerned bounded operator is necessary and sufficient. The last-mentioned characterization is a major key to prove the regularity of the class of generalized Drazin-Riesz invertible bounded operators.

All these results are then subsequently transmitted in the framework of semi-simple Banach algebras all within further results in relation with the generalized resolvent formula of two generalized Drazin-Riesz invertible elements. Also, in the case of Banach algebras, several characterizations of the uniqueness of the generalized Drazin T-Riesz inverses are established (the generalized Drazin T-Riesz inverses are a generalization of generalized Drazin-Riesz inverses introduced by S. C. Zivkovic-Zlatanovic in 2023 ).

Next, we extend the notion of generalized Drazin-Riesz invertibility with several results found in the framework of bounded operators to the context of closed operators, except for the regularity in the sense of Kordula and Müller which is only studied in the framework of Banach algebras, and then we relate this generalized Drazin-Riesz invertibility with the theory of  $C_0$ -semigroups.

An application in the framework of bounded operators acting in a Hilbert space, we solve the abstract singular equations using generalized invertibility in the sense of Drazin-Riesz, taking into account the West decomposition. Also, in the setting of closed operators, we propose a solution for abstract second-order differential equations in the framework of Banach spaces, this solution is constructed via the use  $C_0$ -semigroups having in our case closed generalized Drazin-Riesz invertible operators as their infinitesimal generators.

### Key Words:

Riesz elements, Fredholm theory, generalized Drazin-Riesz invertible operators,  $C_0$ -semigroups, regularity.