AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **KCHIT Omar**
Soutiendra : **le Vendredi 08/12/2023** à **15H00**
Lieu : ***FSDM – Centre Visioconférence***

Une thèse intitulée :
On Integral Bases and Monogenity of Number Fields

En vue d'obtenir le ***Doctorat***
FD : ***Mathématiques et Applications***
Spécialité : ***Algèbre et Théorie des Nombres***

Devant le jury composé comme suit :

Nom et prénom	Etablissement	Grade	Qualité
Pr MOUANIS Hakima	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PES	Président
Pr GAÁL István	Université de Debrecen, Hongrie	PES	Rapporteur & Examinateur
Pr DEAJIM Abdulaziz	Université Le Roi Khalid, Arabie Saoudite	PES	Rapporteur & Examinateur
Pr EZ-ZOUAK Siham	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PH	Rapporteur & Examinateur
Pr ZEKHNINI Abdelkader	Faculté des Sciences, Université Mohamed Premier, Oujda	PES	Examinateur
Pr SAHMOUDI Mohammed	Faculté des Sciences, Université Moulay Ismail, Meknès	PH	Examinateur
Pr CHILLALI Abdelhakim	Faculté Polydisciplinaire, Taza	PH	Examinateur
Pr EL FADIL Lhoussain	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PES	Directeur de thèse

Résumé :

La détermination d'une base entière et l'étude de la monogeniètè d'un corps de nombres sont des problèmes classiques et importants en théorie algébrique des nombres. Il est bien connu que les corps de nombres quadratiques et cyclotomiques sont monogénes. Mais, quand on parle d'autres familles des corps de nombres, on peut trouver des corps qui ne sont pas monogénes. En 1871, Dedekind était le premier à donner un exemple d'un corps de nombres cubique qui n'est pas monogéne, ce qui motive la question la plus courante dans ce domaine de recherche : quels corps des nombres sont monogénes?. Soient $K = Q(\alpha)$ un corps de nombres défini par un polynôme unitaire et irréductible $F(x) \in Z[x]$ et Z_K son anneau des entiers. Cette thèse est consacrée au calcul des bases entières et l'étude de la monogeniètè de certaines familles de corps de nombres. Dans un premier temps, nous étudions la monogeniètè de certaines classes de corps de nombres purs de degré n avec $n \in \{60, 3^r, 2^r \cdot 7^s, 2^r \cdot 5^s \cdot 7^t\}$, où r, s, et t sont des entiers naturels et m un entier sans facteur carré. Nous caractérisons quand est ce que $Z[\alpha]$ soit l'anneau des entiers du corps K et nous donnons des conditions suffisantes qui assurent que l'indice $i(K)$ est non trivial. En particulier, si $i(K) \neq 1$, alors K n'est pas monogène. Pour $n = p^r$ et m un entier quelconque, nous calculons une base entière et nous étudions la monogeniètè de K. Ensuite, nous étudions la monogeniètè de plusieurs corps de nombres K définis par les trinômes $F(x) = x^n+ax^m +b$, soit x^6+ax^5+b, x^7+ax^3+b, x^9+ax+b et $x^{12}+ax^m+b$, et on caractérise l'indice $i(K)$ de manière à répondre au problème 22 de Narkiewicz pour ces familles de corps de nombres. Enfin, nous étudions la monogéniètè des corps de nombres définis par les quadrinômes x^5+ax^m+bx+c. On donne des conditions suffisantes pour que $i(K) \neq 1$, et donc K n'est pas monogène en donnant $\nu_p(i(K))$ dans chaque cas, où ν_p est la valuation p-adique de Q. Notre méthode est basée sur les techniques des polygones de Newton et la factorisation en produit de puissances d'idéaux premiers dans les corps de nombres.

Mots clés : Corps de nombres - Base entière - Base entière de puissances - Monogène - Théorème d'Ore - Factorisation en produit de puissances d'idéaux premiers - Polygone de Newton - Indice d'un corps de nombres.

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES
كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ FES

CENTRE D'ETUDES DOCTORALES
«SCIENCES ET TECHNIQUES ET
SCIENCES MÉDICALES »

مركز الدكتوراه « العلوم والتقنيات
والعلوم الطبية»

ON INTEGRAL BASES AND MONOGENITY OF NUMBER FIELDS

Abstract :

Determining an integral basis and studying the monogenity of a number field are classical and important problems in algebraic number theory. It is well known that quadratic and cyclotomic number fields are monogenic. But, when we talk about other families of number fields, we can find out fields which are not monogenic. In 1871, Dedekind was the first who gave an example of a non-monogenic cubic number field, which motivates the most common question in this research area: which fields are monogenic?. Let $K = Q(\alpha)$ be a number field defined by a monic irreducible polynomial $F(x) \in Z[x]$ and Z_K its ring of integers. In this thesis, we calculate integral bases and study the monogenity of certain families of number fields. At first, we study the monogenity of certain classes of pure number fields of degree n with $n \in \{60, 3^r, 2^r \cdot 7^s, 2^r \cdot 5^s \cdot 7^t\}$, where r, s, and t are two positive rational integers, m a square-free rational integer. We characterize when $Z[\alpha]$ is the ring of integers of K and we give sufficient conditions which ensure that the index i(K) is non-trivial. In particular, if $i(K) \neq 1$, then K is not monogenic. For $n = p^r$ and m not necessarily square-free, we calculate an integral basis and study the monogenity of K. Afterward, we study the monogenity of several number fields K defined by trinomials $F(x) = x^n+ax^m +b$, namely x^6+ax^5+b, x^7+ax^3+b, x^9+ax+b, and $x^{12}+ax^m+b$. For each number field K, we characterize the index i(K) in such a way we answer Problem 22 of Narkiewicz for these families of number fields. Finally, we study the monogenity of quintic number fields defined by x^5+ax^m+bx+c. We give sufficient conditions so that K is not monogenic and we evaluate $\nu_p(i(K))$ in each case, where ν_p is the p-adic valuation of Q. Our method is based on Newton polygon techniques and prime ideal factorization in number fields.

Key Words: Number field - Integral basis - Power integral basis - Monogenic - Theorem of Ore - Prime ideal factorization - Newton polygon - Index of a Number Field.