AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **MEKRAMI Abderrahim**
Soutiendra : **le Samedi 26/07/2025** à **10H00**
Lieu : **FSDM – *Centre Visioconférence***

Une thèse intitulée :

« Géométrie du fibré tangent à une variété de Finsler »

En vue d'obtenir le **Doctorat**

FD : ***Mathématiques et Applications***
Spécialité : ***Géométrie***

Devant le jury composé comme suit :

Nom et prénom	Etablissement	Grade	Qualité
ZGUITTI Hassane	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Président
AIT BEN HADDOU Malika	Faculté des Sciences, Meknès	PES	Rapporteur
LEBZIOUI Hicham	Ecole Supérieure de Technologie, Khénifra	MCH	Rapporteur
AMRI Noura	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz- Fès	MCH	Rapporteur
ASSIM Jilali	Faculté des Sciences, Meknès	PES	Examinateur
ZAHOUAN Youness	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	MCH	Examinateur
KADAOUI ABBASSI Mohamed Tahar	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Directeur de thèse

Résumé :

Dans la première partie de cette thèse, motivée par la compréhension de la relation entre une variété (M,g) et son fibré tangent TM, nous avons introduit le concept de métriques F-naturelles, analogues aux métriques g-naturelles (dans les variétés riemanniennes) sur les fibrés tangents (TM,G) des variétés de Finsler. Ces métriques sont sphériquement symétriques et dépendent de six fonctions réelles définies sur l'ensemble des nombres positifs.

Nous donnons une caractérisation détaillée des métriques F-naturelles non dégénérées et riemanniennes, et calculons leurs connexions de Levi-Civita associées. Comme application, nous montrons que le champ vectoriel géodésique sur le fibré tangent, muni d'une métrique F-naturelle riemannienne, est incompressible. De plus, nous établissons des conditions nécessaires et suffisantes pour que les fibres du fibré tangent soient totalement géodésiques. En particulier, nous prouvons que pour les métriques F-naturelles de type Kaluza-Klein (où les distributions horizontales et verticales sont orthogonales), les fibres sont totalement géodésiques si et seulement si la variété de base est une variété de Landsberg.

Nous étudions ensuite les champs vectoriels conformes, homothétiques et de Killing sur les fibrés tangents de variétés de Finsler munis de métriques F-naturelles pseudo-riemanniennes. Nous donnons une caractérisation complète des relèvements horizontaux de Killing, et prouvons qu'il n'existe pas de champ vectoriel de relèvement horizontal proprement conforme ou homothétique. Nous analysons aussi les champs vectoriels de relèvement vertical pour les métriques F-naturelles de type Kaluza-Klein et caractérisons les champs vectoriels de relèvement complet conformes sur les fibrés tangents munis des métriques de Sasaki et de Cheeger-Gromoll. Notamment, dans le cas de la métrique de Sasaki, tous les champs vectoriels de relèvement complet conformes sont de Killing, alors qu'il n'existe pas de tels champs dans le cas de Cheeger-Gromoll.

Nous étudions également les champs vectoriels verticaux dérivés des transvections antisymétriques de champs tenseurs

(1,1) sur la variété de base, et nous caractérisons ceux qui sont conformes lorsque la métrique F-naturelle est de type Sasaki ou Cheeger-Gromoll. En particulier, nous démontrons que de tels champs vectoriels homothétiques doivent être de Killing. Comme application, nous classifions toutes les métriques F-naturelles pseudo-riemanniennes pour lesquelles le champ de Liouville est conforme, homothétique ou de Killing, et prouvons que le champ géodésique ne peut pas être conforme.

Tout au long de nos calculs, nous utilisons le formalisme du pullback développé dans les travaux de Grifone, Lovas, Szilasi et Tóth, ainsi que la théorie générale des connexions sur les fibrés vectoriels, pour revisiter la géométrie de Finsler, conduisant à une présentation élégante des formules pertinentes (sans coordonnées).

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous équipons le fibré indicatrice d'une variété de Finsler $T_1 M$ de métriques F-naturelles G ,induites par le fibré tangent TM. Notamment, ces métriques sur l'indicatrice ne dépendent que de quatre constantes, reproduisant la structure des métriques g-naturelles sur les fibrés unitaires tangents des variétés riemanniennes :

Nous commençons par examiner les propriétés géométriques du champ géodésique sur le fibré indicatrice. En particulier, nous montrons qu'il est toujours incompressible, et qu'il est de Killing si et seulement si la variété de base a une courbure de drapeau constante.

Nous construisons ensuite une famille à trois paramètres de structures métriques de contact dont les métriques riemanniennes associées sont F-naturelles, et nous explorons comment leurs propriétés de contact reflètent la géométrie de la variété de base. Plus précisément, nous prouvons que ces structures peuvent être de type K-contact sans nécessairement être de type Sasakien, ce qui constitue une distinction fondamentale avec les structures de contact g-naturelles sur les fibrés tangents unitaires des variétés riemanniennes.

Cela mène à une caractérisation des variétés de Finsler à courbure de drapeau positive constante en termes de l'existence de structures K-contact sur leurs fibrés indicatrices.

Tout au long de nos calculs, nous utilisons le formalisme du pullback développé dans les travaux de Grifone, Lovas, Szilasi et Tóth, ainsi que la théorie générale des connexions sur les fibrés vectoriels, pour revisiter la géométrie de Finsler, conduisant à une présentation élégante des formules pertinentes (sans coordonnées).

Mots clés :

Fibré tangent, métriques g-naturelles, variétés de Finsler, métriques F-naturelles, fibré des indicatrices, symétries infinitésimales.

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES
كلية العلوم ظهر المهراز فاس
FACULTE DES SCIENCES DHAR EL MAHRAZ FES

CENTRE D'ETUDES DOCTORALES «SCIENCES ET TECHNIQUES ET SCIENCES MÉDICALES »

مركز الدكتوراه « العلوم والتقنيات والعلوم الطبية»

ON THE GEOMETRY OF THE TANGENT BUNDLE OF A FINSLER MANIFOLD

Abstract :

In the first part of this thesis, and motivated by understanding the relationship between a random manifold (M,g) and its tangent bundle TM, we introduce the concept of F-natural metrics, which are analogues of g-natural metrics (in the Riemannian manifolds) on the slit tangent bundles (TM,G) of Finsler manifolds. These metrics are spherically symmetric and depend on six real-valued functions defined on the set of positive numbers.

We provide a detailed characterization of non-degenerate and Riemannian F-natural metrics and compute their associated Levi-Civita connections. As an application, we demonstrate that the geodesic vector field on the slit tangent bundle, equipped with any Riemannian F-natural metric, is incompressible. Moreover, we establish necessary and sufficient conditions for the fibers of the slit tangent bundle to be totally geodesic. Specifically, we prove that for Kaluza-Klein type F-natural metrics (where horizontal and vertical distributions are orthogonal), the fibers are totally geodesic if and only if the base manifold is a Landsberg manifold.

Then we investigate conformal, homothetic, and Killing vector fields on the slit tangent bundles of Finsler manifolds equipped with pseudo-Riemannian F-natural metrics. We provide a comprehensive characterization of Killing horizontal lifts of vector fields, proving that no proper conformal or homothetic horizontal lift vector fields exist. Additionally, we analyze the vertical lift vector fields for Kaluza-Klein type F-natural metrics and characterize conformal complete lift vector fields on slit tangent bundles of Finsler manifolds endowed with the Sasaki and Cheeger-Gromoll metrics. Notably, in the Sasaki metric case, all conformal complete lift vector fields are Killing, whereas no Killing complete lift vector fields exist in the Cheeger-Gromoll metric case. We also investigate vertical vector fields on the slit tangent bundle derived from the "skew symmetric transvections" of (1,1)-tensor fields on the base manifold, characterizing those that are conformal when the F-natural metric on the slit tangent bundle is the Sasaki or Cheeger-Gromoll metric. Specifically, we demonstrate that such homothetic vector fields must be Killing. As an application, we classify all the pseudo-Riemannian F-natural metrics on the slit tangent bundle of a Finsler manifold for which the Liouville vector field is conformal, homothetic, or Killing, and prove that the geodesic vector field cannot be conformal.

In the second part of this thesis, we equip the indicatrix bundle of a Finsler manifold T_1 M with the F-natural metrics G induced from the slit tangent bundle TM . Notably, these metrics on the indicatrix depend only on four constants, mirroring the structure of g-natural metrics on unit tangent bundles of Riemannian manifolds.

We begin by examining geometric properties of the geodesic vector field on the indicatrix bundle. In particular, we establish that it is always incompressible and that it is Killing only if the base manifold has constant flag curvature. We then construct a three-parameter family of contact metric structures whose associated Riemannian metrics are F-natural, and we explore how their contact metric properties reflect the geometry of the base manifold. Specifically, we prove that these structures can be K-contact but not necessarily Sasakian, marking a fundamental distinction from g-natural contact structures on unit tangent

bundles of Riemannian manifolds. This leads to a characterization of Finsler manifolds with positive constant flag curvature in terms of the existence of K-contact structures on their indicatrix bundles.

Throughout our computations, we adopt the pullback formalism developed in the works of Grifone Lovas, Szilasi and Tóth, along with the general theory of connections on vector bundles, to revisit Finsler geometry, leading to an elegant presentation of the relevant formulas (with free-coordinate expressions).

Key Words :
Tangent bundle, g-natural metric, Finsler manifold, slit tangent bundle , Indicatrix bundle, F-natural metric, infinitesimal symmetries.