



## AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **DAOUDI Aukacha**

Soutiendra : le **Vendredi 24/10/2025 à 15H30**

Lieu : **FSDM – Département de Géologie**

Une thèse intitulée :

« **On nonlinear maps preserving certain spectral quantities of products of operator** »

En vue d'obtenir le **Doctorat**

FD : **Mathématiques et Applications**

Spécialité : **Analyse fonctionnelle et Théorie spectrale**

Devant le jury composé comme suit :

Nom et prénom	Etablissement	Grade	Qualité
ZGUITTI Hassane	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Président
EL AMRANI Abdelkalek	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	MCH	Rapporteur
ELHODAIBI Mhamed	Faculté des Sciences, Oujda	PES	Rapporteur
EL-BAKKALI Abdeslam	Faculté des Sciences, El Jadida	PES	Rapporteur
BABAHMED Mohammed	Faculté des Sciences, Meknès	PES	Examineur
BOUA Hamid	Ecole Normal Supérieure, Fès	MCH	Examineur
ECH-CHERIF EL KETTANI Mustapha	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Directeur de thèse
BENBOUZIANE Hassane	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	MCH	Co-directeur de thèse



## Sur des applications non linéaires préservant certaines quantités spectrales de produits d'opérateurs

DAOUDI Aukacha

### Résumé :

Cette thèse est consacrée à l'étude des applications non linéaires sur l'algèbre des opérateurs linéaires bornés qui préservent certaines quantités spectrales des produits d'opérateurs. Le travail est divisé en deux parties principales.

Dans la première partie, nous caractérisons les applications non linéaires sur  $B(X)$ , l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach complexe  $X$  de dimension infinie, qui préservent toute fonction spectrale  $\Delta(\cdot)$  vérifiant

$$\partial(\sigma(\cdot)) \subseteq \Delta(\cdot) \subseteq (\cdot),$$

où  $\sigma(\cdot)$  désigne le spectre usuel et  $\sigma(\cdot)$  son bord. Une telle fonction est appelée  $\partial$ -spectre.

Nous commençons par décrire toutes les applications surjectives sur  $B(X)$ , où  $X$  est un espace de Banach complexe de dimension infinie, qui préservent le  $\partial$ -spectre du produit usuel d'opérateurs.

Lorsque  $X=H$  est un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, nous caractérisons également les applications qui préservent ces fonctions spectrales du skew-produit d'opérateurs, tout en relâchant l'hypothèse de surjectivité.

Par la suite, nous étendons ces investigations au produit généralisé d'opérateurs. Plus précisément, nous caractérisons les applications  $\phi$  (non nécessairement surjectives) sur  $B(X)$  satisfaisant

$$\Delta(T_1 * \dots * T_k) = \Delta(\phi(T_1) * \dots * \phi(T_k)) \text{ pour tous } T_1, \dots, T_k \in B(X),$$

où  $\Delta$  est un  $\partial$ -spectre.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous étudions des applications surjectives sur l'algèbre des opérateurs linéaires bornés qui préservent l'ascende ou la descente de certains produits d'opérateurs. Nous donnons une description complète des applications surjectives  $\phi : B(H) \rightarrow B(H)$  satisfaisant

$$asc(AB^*A) = asc(\phi(A)\phi(B)^*\phi(A)) \text{ pour tout } A, B \in B(H),$$

ou,

$$desc(AB^*A) = desc(\phi(A)\phi(B)^*\phi(A)) \text{ pour tout } A, B \in B(H),$$

où  $H$  est un espace de Hilbert complexe de dimension infinie.

Enfin, nous caractérisons des applications surjectives  $\phi : B(X) \rightarrow B(X)$  qui préservent l'ascende ou la descente du produit de Jordan d'opérateurs, c'est-à-dire celles satisfaisant

$$asc(AB + BA) = asc(\phi(A)\phi(B) + \phi(B)\phi(A)) \text{ pour tous } A, B \in B(X),$$

Ou,

$$desc(AB + BA) = desc(\phi(A)\phi(B) + \phi(B)\phi(A)) \text{ pour tous } A, B \in B(X).$$

**Mots clés:** Problèmes de préservation non linéaires, Algèbres de Banach,  $\partial$ -Spectre, Opérateurs de rang un, Produit d'opérateurs, Skew produit, Produit du Jordan, Produit généralisé, Ascende, Descente.



## On nonlinear maps preserving certain spectral quantities of operator products

### Abstract :

This thesis is devoted to the study of nonlinear maps on the algebra of bounded linear operators that preserve certain spectral quantities of products of operators. The work is divided into two main parts.

In the first part, we characterize nonlinear maps on  $B(X)$ , the algebra of bounded linear operators on an infinite-dimensional complex Banach space  $X$ , that preserve every spectral function  $\Delta(\cdot)$  satisfying

$$\partial(\sigma(\cdot)) \subseteq \Delta(\cdot) \subseteq (\cdot),$$

where  $\sigma(\cdot)$  denotes the usual spectrum and  $\partial(\sigma(\cdot))$  its boundary. Such a function is referred to as a  $\partial$ -spectrum.

We begin by determining the forms of all surjective maps on  $B(X)$ , the algebra of bounded linear operators on an infinite-dimensional complex Banach space  $X$ , that preserve the  $\partial$ -spectrum of usual product of operators.

When  $X = H$  is an infinite-dimensional complex Hilbert space, we further characterize the maps that preserve these spectral functions for the skew-product of operators, while relaxing the surjectivity assumption.

Subsequently, we extend these investigations to generalized products of operators. Specifically, we characterize maps  $\phi$  (not necessarily surjective) on  $B(X)$  that satisfy

$$\Delta(T_1 * \dots * T_k) = \Delta(\phi(T_1) * \dots * \phi(T_k)) \text{ for all } T_1, \dots, T_k \in B(X),$$

where  $\Delta$  is a  $\partial$ -spectrum map.

In the second part of this thesis, we study surjective maps on the algebra of all bounded linear operators that preserve the ascent or descent of certain products of operators.

We first provide a complete description of surjective mappings  $\phi : B(H) \rightarrow B(H)$  satisfying

$$\text{asc}(AB^*A) = \text{asc}(\phi(A)\phi(B)^*\phi(A)) \text{ for all } A, B \in B(H),$$

or,

$$\text{desc}(AB^*A) = \text{desc}(\phi(A)\phi(B)^*\phi(A)) \text{ for all } A, B \in B(H),$$

where  $H$  is an infinite-dimensional complex Hilbert space.

Finally, we characterize surjective maps  $\phi : B(X) \rightarrow B(X)$  that preserve the ascent or descent of the Jordan product, i.e., those satisfying

$$\text{asc}(AB + BA) = \text{asc}(\phi(A)\phi(B) + \phi(B)\phi(A)) \text{ for all } A, B \in B(X),$$

Or,

$$\text{desc}(AB + BA) = \text{desc}(\phi(A)\phi(B) + \phi(B)\phi(A)) \text{ for all } A, B \in B(X).$$

**Keywords:** Nonlinear preserver problems, Banach algebras,  $\partial$ -spectrum, Rank-one operators, Product of operators, Skew product, Jordan product, Generalized product, Ascent, Descen