

Nom et prénom	Etablissement	Grade	Qualité
ECH-CHERIF EL KETTANI Mustapha	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Président
ALAOUI ISMAILI Karima	Faculté des Sciences, Rabat	MCH	Rapporteur
SAHMOUDI Mohammed	Faculté des Sciences, Meknès	MCH	Rapporteur
CHOULLI Hanan	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	MCH	Rapporteur
BAKKARI Chahrazade	Faculté des Sciences, Meknès	PES	Examineur
ZAHIR Youssef	Faculté des Sciences, Rabat	MCH	Examineur
MOUANIS Hakima	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Directeur de thèse
MOUTASSIM Abdelhadi	Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation, Casablalca-Settat.	PES	Co-directeur de thèse



Résumé :

En dimension finie, les algèbres réelles préhilbertiennes sans diviseurs de zéro vérifiant l'identité $\|x^2\| = \|x\|^2$, en particulier les algèbres absolument valuées, sont contenues dans une classe importante des algèbres réelles de division linéaire. Il en résulte que leur dimension vaut 1, 2, 4 ou 8. Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de la détermination, par des méthodes purement algébriques, de ces algèbres dans les cas de dimension deux et quatre.

Nous introduisons une nouvelle famille d'algèbres, notée $A_i(\gamma, \delta)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, avec γ, δ deux paramètres réels, qui nous permet de classifier toutes les algèbres préhilbertiennes sans diviseurs de zéro de dimension deux qui satisfont l'identité $\|x^2\| = \|x\|^2$. Cela généralise de nombreuses études faites dans ce contexte.

En dimension quatre, le problème s'est avéré assez délicat. En imposant l'existence d'un idempotent central e , nous avons pu apporter des réponses partielles. Nous montrons que les algèbres à trois puissances associatives (3PA) sont isomorphes à $H^{(\alpha)}$ ou $H^{(\alpha)}$, avec $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Nous donnons également une caractérisation des algèbres flexibles et des algèbres à puissance commutative.*

Par ailleurs, nous étudions les algèbres réelles absolument valuées de dimension quatre. Via des approches algébriques, nous construisons de nouveaux modèles d'algèbres, notés M_i , avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, ce qui nous permet de classifier les algèbres absolument valuées contenant un idempotent omniprésent e et au moins deux sous-algèbres de dimension deux. Nous explorons également le cas où e est une unité à gauche, nous démontrons que de telles algèbres sont, à isomorphisme près, $M_i(\alpha, \beta)$, $i \in \{3, 4\}$, avec α, β deux paramètres réels. Cela généralise plusieurs études précédentes.

Mots clés :

Algèbre préhilbertienne, algèbre absolument valuée, algèbre flexible, algèbre à puissance trois associative, algèbre commutative, idempotent central, idempotent omniprésent, unité omniprésente à gauche.



ON FINITE-DIMENSIONAL PRE-HILBERT ALGEBRAS THAT SATISFY THE IDENTITY $\|x^2\| = \|x\|^2$

Abstract:

In finite dimensions, real pre-Hilbert algebras without zero divisors satisfying the identity $\|x^2\| = \|x\|^2$, in particularly absolute valued algebras, are contained within an important class of real division algebras. Consequently, their dimension is either 1, 2, 4, or 8. In this work, we focus on the problem of determining these algebras in the two- and four-dimensional cases using purely algebraic methods.

We introduce a new family of algebras, denoted $A_i(\gamma, \delta)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, where γ and δ are two real parameters, which allows us to classify all pre-Hilbert algebras without zero divisors of dimension two that satisfy the identity $\|x^2\| = \|x\|^2$. This generalizes many previous studies in this context.

In the four-dimensional case, the problem turned out to be quite delicate. By imposing the existence of a central idempotent e , we were able to provide partial answers. We show that the third power associative algebras (3PA) are isomorphic to either $H^{(\alpha)}$ or $H^{(\alpha)}$ with $\alpha \neq 1/2$. We also provide a characterization of flexible algebras and algebras with power commutativity.

In the other hand, we study four-dimensional absolute valued real algebras. Using algebraic approaches, we construct new algebra models, denoted by M_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, which classify all 4-dimensional absolute valued algebras containing an omnipresent idempotent e and at least two two-dimensional sub-algebras. We also explore the case where e is a left unit and we show that such algebras are, up to isomorphism, $M_i(\alpha, \beta)$, $i \in \{3, 4\}$, with α and β being two real parameters. This generalizes several previous studies.

Key Words:

Pre-Hilbert algebra, absolute valued algebra, flexible algebra, three-power associative algebra, commutative algebra, central idempotent, omnipresent idempotent, left omnipresent unit.