AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **BAHADI Mohamed**
Soutiendra : **le Samedi 16/05/2026** à **10H00**
*Lieu : **FSDM – Département des Mathématiques***

Une thèse intitulée :

On Singular Nonlinear Elliptic Equations and Inclusions with Nonstandard Growth

En vue d'obtenir le **Doctorat**

FD : **Sciences et Techniques**
Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Devant le jury composé comme suit :

Nom et prénom	Etablissement	Grade	Qualité
AZROUL El houssine	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Président
EL MOUMNI Mostafa	Faculté des sciences, El Jadida	MCH	Rapporteur & Examinateur
MEKKOUR Mounir	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	MCH	Rapporteur & Examinateur
MESKINE Driss	Ecole Supérieure de Technologie, Essaouira	PES	Rapporteur & Examinateur
ABERQI Ahmed	Ecole Nationale des Sciences Appliquées, Fès	MCH	Examinateur
BARBARA Abdelkrim	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	MCH	Examinateur
AKDIM Youssef	Faculté des Sciences Dhar EL Mahraz, Fès	PES	Directeur de thèse
OUBOUFETTAL Morad	Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Meknès	MC	Invité

Résumé :

Cette thèse étudie une classe d'équations et d'inclusions elliptiques non linéaires caractérisées par la présence simultanée de cinq caractéristiques difficiles : des non-linéarités singulières, des opérateurs multivoques modélisés par des graphes maximaux monotones, des conditions de croissance non standard gouvernées par des exposants variables, des opérateurs dégénérés, et des termes à croissance naturelle. Ces problèmes apparaissent naturellement dans divers contextes physiques, notamment la dynamique des fluides non newtoniens avec phénomènes de seuil, les transitions de phase dans les milieux hétérogènes, et la cinétique des réactions chimiques avec des lois de type Arrhenius.

Le travail est organisé en six chapitres principaux, construisant progressivement des concepts fondamentaux vers des formulations de problèmes de plus en plus complexes. Le Chapitre 1 établit le cadre mathématique, présentant la théorie des espaces de Lebesgue et Sobolev à exposants variables, des opérateurs maximaux monotones et leurs approximations de Yosida, ainsi que les outils techniques essentiels pour traiter les singularités.

Dans le Chapitre 2, nous étudions des équations elliptiques singulières avec des singularités de type logarithmique dans les espaces de Sobolev à exposant variable. Nous prouvons l'existence de solutions faibles pour des problèmes de la forme :

$$-\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) = \frac{\mu}{u^{\gamma}\ln^{\lambda}(1+u)}$$

Avec $\mu \in W^{-1,p(x)}(\Omega)$, étendant les résultats classiques de Boccardo et Orsina au cadre des exposants variables tout en incorporant des singularités logarithmiques.

Le Chapitre 3 complète cette étude en examinant des équations elliptiques dégénérées avec des non-linéarités singulières dans les espaces de Sobolev classiques. Nous considérons des problèmes de la forme

$$-\operatorname{div}\left(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|u|)^{\theta(p-1)}}\right) = \mu h(u)$$

avec $\mu \in W^{-1,p(x)}(\Omega)$, et h singulière à l'origine. La dégénérescence, contrôlée par le paramètre θ, fait perdre à l'opérateur sa coercivité lorsque $|u|$ augmente, créant de nouvelles difficultés mathématiques lorsqu'elle est combinée avec la singularité. En utilisant un schéma de double approximation (régularisant à la fois la dégénérescence et la singularité), des arguments de troncature et le théorème du point fixe de Schauder, nous établissons l'existence de solutions faibles $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Ce chapitre démontre comment les techniques de traitement des singularités peuvent être adaptées pour traiter la dégénérescence, établissant un pont entre la théorie elliptique singulière et l'analyse des opérateurs non uniformément elliptiques.

Le Chapitre 4 introduit l'aspect multivoque en analysant des inclusions elliptiques avec sources singulières dans les espaces de Sobolev classiques. Nous établissons l'existence de couples solutions *(u,b)* pour des problèmes :

$$\beta(u) - \operatorname{div}(a(x,\nabla u)) \ni \frac{f}{u^\gamma}$$

où β est un graphe maximal monotone et $b \in \beta(u)$ presque partout, établissant un pont entre les théories des équations elliptiques singulières et des inclusions elliptiques.

Le Chapitre 5 représente la synthèse principale, étudiant les inclusions elliptiques singulières dans les espaces de Sobolev à exposant variable. Nous analysons le problème combiné :

$$\beta(u) - \operatorname{div}(a(x,\nabla u)) \ni \frac{f}{u^\gamma}$$

dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, distinguant entre les singularités modérées $0 < \gamma \leq 1$ où les solutions ont une énergie globale finie, et les singularités fortes $\gamma > 1$ où seules des bornes d'énergie locales sont disponibles.
Enfin, le Chapitre 6 étend le cadre en incorporant des termes à croissance naturelle, considérant des inclusions de la forme :

$$\zeta(u) + A(u) + H(x,u,\nabla u) \ni \frac{f}{u^\gamma}$$

où *H* a une croissance naturelle d'ordre *p* dans le gradient, généralisant les travaux antérieurs sur les problèmes à croissance naturelle en incorporant des singularités et des opérateurs multivoques.

Tout au long de ce travail, nous employons un cadre méthodologique cohérent basé sur des schémas d'approximation, des estimations a priori et des analyses de convergence, combinant des outils de la théorie des opérateurs maximaux monotones, de l'analyse fonctionnelle à exposants variables et de la théorie des EDP singulières. Les résultats fournissent ce que nous croyons être la première théorie d'existence complète pour des problèmes combinant singularités, graphes maximaux monotones et croissance à exposant variable.

Mots clés :
Équations elliptiques non linéaires, Inclusions elliptiques, Non-linéarités singulières, Graphes maximaux monotones, Espaces de Sobolev à exposant variable, p(x)-Laplacien, Coercitivité dégénérée, Termes à croissance naturelle, Opérateurs de Leray-Lions

On Singular Nonlinear Elliptic Equations and Inclusions with Nonstandard Growth

Abstract :

This thesis investigates a class of nonlinear elliptic partial differential equations and inclusions characterized by the simultaneous presence of five challenging features: singular nonlinearities, multi-valued operators modeled by maximal monotone graphs, non-standard growth conditions governed by variable exponents, degenerate operators, and natural growth terms. These problems arise naturally in various physical contexts, including non-Newtonian fluid dynamics with threshold phenomena, phase transitions in heterogeneous media, and chemical reaction kinetics with Arrhenius-type laws.

The work is organized into six main chapters, building progressively from foundational concepts to increasingly complex problem formulations. Chapter 1 establishes the mathematical framework, presenting the theory of Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, maximal monotone operators and their Yosida approximations, and essential technical tools for handling singularities.

In Chapter 2, we study singular elliptic equations with logarithmic-type singularities in variable exponent Sobolev spaces. We prove existence of weak solutions for problems of the form:

$$-\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) = \frac{\mu}{u^{\gamma}\ln^{\lambda}(1+u)}$$

with $\mu \in W^{-1,p(x)}(\Omega)$, extending classical results of Boccardo and Orsina to the variable exponent setting while incorporating logarithmic singularities.

Chapter 3 complements the study by examining degenerate elliptic equations with singular nonlinearities in classical Sobolev spaces. We consider problems of the form

$$-\operatorname{div}\left(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|u|)^{\theta(p-1)}}\right) = \mu h(u)$$

with $\mu \in W^{-1,p(x)}(\Omega)$ and h singular at zero. The degeneracy, controlled by the parameter θ, causes the operator to lose coercivity as $|u|$ increases, creating new mathematical challenges when combined with the singularity. Using a double approximation scheme (regularizing both the degeneracy and the singularity), truncation arguments, and the Schauder fixed point theorem, we establish existence of weak solutions $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. This chapter demonstrates how techniques for handling singularities can be adapted to deal with degeneracy, providing a bridge between singular elliptic theory and the analysis of non-uniformly elliptic operators.

Chapter 4 introduces the multi-valued aspect by analyzing elliptic inclusions with singular sources in classical Sobolev spaces. We establish existence of solution pairs *(u,b)* for problems:

$$\beta(u) - \operatorname{div}(a(x, \nabla u)) \ni \frac{f}{u^\gamma}$$

where β is a maximal monotone graph and $b \in \beta(u)$ almost everywhere, bridging theories of singular elliptic equations and elliptic inclusions.

Chapter 5 represents the core synthesis, studying singular elliptic inclusions in variable exponent Sobolev spaces. We analyze the combined problem:

$$\beta(u) - \operatorname{div}(a(x, \nabla u)) \ni \frac{f}{u^\gamma}$$

in $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, distinguishing between mild singularities $0 < \gamma \leq 1$ where solutions have finite global energy, and strong singularities $\gamma > 1$ where only local energy bounds hold.

Finally, Chapter 6 extends the framework by incorporating natural growth terms, considering inclusions of the form:

$$\zeta(u) + A(u) + H(x, u, \nabla u) \ni \frac{f}{u^\gamma}$$

where *H* has natural growth of order \$p\$ in the gradient, generalizing previous works on natural growth problems by incorporating singularities and multi-valued operators.

Throughout, we employ a consistent methodological framework based on approximation schemes, a priori estimates, and convergence analysis, combining tools from maximal monotone operator theory, variable exponent functional analysis, and the theory of singular PDEs. The results provide what we believe to be the first comprehensive existence theory for problems combining singularities, maximal monotone graphs, and variable exponent growth.

Key Words :
Nonlinear elliptic equations, Elliptic inclusions, Singular nonlinearities, Maximal monotone graphs, Variable exponent Sobolev spaces, p(x)-Laplacian, Weak solutions, Degenerate coercivity, Natural growth terms, Leray-Lions operators.