



AVIS DE SOUTENANCE DE THESE

Le Doyen de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz –Fès – annonce que

Mr **FERYOUCH Badr**

Soutiendra : **le Samedi 03/10/2026 à 10H00**

Lieu : **Centre des Etudes Doctorales - USMBA - Amphi 2**

Une thèse intitulée :

Étude de certaines classes généralisées des anneaux des polynômes à valeurs entières

En vue d'obtenir le **Doctorat**

FD : **Sciences et Techniques**

Spécialité : **Algèbre**

Devant le jury composé comme suit :

Nom et prénom	Etablissement	Grade	Qualité
Pr. KADAOUI ABBASSI Mohamed Tahar	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PES	Président
Pr. ZEKHNINI Abdelkader	Faculté des Sciences, Oujda	PES	Rapporteur
Pr. SAHMOUDI Mohammed	Faculté des Sciences, Meknès	MCH	Rapporteur
Pr. CHOULLI Hanan	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	MCH	Rapporteur
Pr. TAMOUSSIT Ali	Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation - Sous Massa, Inezgane	MCH	Examineur
Pr. MAHDOU Najib	Faculté des Sciences et Techniques, Fès	PES	Examineur
Pr. MOUANIS Hakima	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	PES	Directeur de thèse
Pr. CHEMS-EDDIN Mohamed Mahmoud	Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Fès	MCH	Co-directeur de thèse



Résumé :

Soient D un anneau intègre de corps des fractions K , et soit E un sous-ensemble non vide de K . L'anneau des polynômes à valeurs entières sur E est l'anneau noté $\text{Int}(E, D)$, défini par

$$\text{Int}(E, D) := \{ f \in K[X] \mid f(E) \subseteq D \}.$$

Cet anneau a fait l'objet de nombreuses études, anciennes comme récentes. Malgré cela, l'étude de ces anneaux demeure un domaine de recherche très actif, et leurs propriétés continuent de soulever de nombreuses questions ouvertes intéressantes.

Une extension naturelle de $\text{Int}(E, D)$ est l'anneau des fractions rationnelles à valeurs entières sur E , noté $\text{Int}^R(E, D)$, et défini par

$$\text{Int}^R(E, D) := \{ \varphi \in K(X) \mid \varphi(E) \subseteq D \}.$$

Cette nouvelle classe est moins étudiée en raison de difficultés intrinsèques.

Dans cette thèse, nous proposons d'étudier une classe plus générale de ces anneaux. Soit B/D une extension d'anneaux intègres. On définit alors les anneaux suivants :

$$\text{Int}_B(E, D) := \{ f \in B[X] \mid f(E) \subseteq D \}$$

et

$$\text{Int}_B^R(E, D) := \{ f \in B(X) \mid f(E) \subseteq D \}.$$

Ces anneaux généralisent les constructions précédentes. Lorsque E est infini, on a

$$\text{Int}_B^R(E, D) = \text{Int}^R(E, D).$$

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude de la structure algébrique de $\text{Int}^R(E, D)$ et $\text{Int}_B^R(E, D)$. Nous décrivons leurs idéaux premiers, leurs propriétés de localisation et leurs opérations de star. De plus, nous étudions le transfert de propriétés algébriques entre ces anneaux de fonctions et l'anneau de base D , en accordant une attention particulière à leur structure de module.

La seconde partie est dédiée à la dimension de Krull de ces anneaux. Nous montrons que, pour tout sous-ensemble fractionnaire E d'un domaine Jaffard D , l'anneau $\text{Int}^R(E, D)$ est lui-même un anneau de Jaffard avec

$$\dim(\text{Int}^R(E, D)) = 1 + \dim(D).$$

Pour les anneaux de pseudo-valuations avec corps résiduel fini, nous démontrons que $\dim(\text{Int}^R(E, D)) = 1 + \dim(D)$ lorsque E est un sous-ensemble fractionnaire du surdomaine de valuation associé. Plus généralement, pour une extension $D \subseteq B$ partageant un idéal non nul I tel que D/I soit fini, et pour tout sous-ensemble fractionnaire $E \subseteq B$, nous établissons les bornes

$$1 + \dim(D) \leq \dim(\text{Int}_B^R(E, D)) \leq 1 + \dim_v(B),$$

où $\dim_v(B)$ désigne la dimension valuative de B . Plusieurs exemples illustrent la diversité des dimensions de Krull possibles dans les contextes polynomiaux et rationnels. Nous



calculons également la dimension de Krull de $\text{Int}(E, D)$ pour diverses classes d'anneaux intègres et sous-ensembles E , et étendons ces résultats à $\text{Int}_B(E, D)$.

Enfin, nous introduisons la clôture rationnelle de E :

$$\text{cl}^R(E) := \{ x \in K \mid \psi(x) \in D, \forall \psi \in \text{Int}^R(E, D) \},$$

et nous la comparons à la clôture divisoriale lorsque D est un anneau de Strong Mori. La clôture polynomiale est également étudiée dans le contexte des anneaux de Mori.

Mots clés :

Polynômes à valeurs entières, fonctions rationnelles à valeurs entières, dimension de Krull, opérations d'étoile.



STUDY OF CERTAIN GENERALIZED CLASSES RINGS OF INTEGER-VALUED POLYNOMIALS

Abstract :

Let D be an integral domain with field of fractions K , and let E be a nonempty subset of K . The ring of integer-valued polynomials on E is denoted by $\text{Int}(E, D)$ and defined by

$$\text{Int}(E, D) := \{ f \in K[X] \mid f(E) \subseteq D \}.$$

This ring has been the subject of numerous studies, both classical and recent. Nevertheless, the study of such rings remains a very active area of research, and their properties continue to raise many interesting open problems. A natural extension of $\text{Int}(E, D)$ is the ring of integer-valued rational functions on E , denoted by $\text{Int}^R(E, D)$, and defined by

$$\text{Int}^R(E, D) := \{ \varphi \in K(X) \mid \varphi(E) \subseteq D \}.$$

This class has been less extensively studied due to inherent difficulties.

In this thesis, we propose to investigate a more general class of such rings. Let B/D be an extension of integral domains. We then define the following rings:

$$\text{Int}_B(E, D) := \{ f \in B[X] \mid f(E) \subseteq D \}$$

and

$$\text{Int}_B^R(E, D) := \{ f \in B(X) \mid f(E) \subseteq D \}.$$

These rings generalize the previous constructions. When E is infinite, we have

$$\text{Int}_B^R(E, D) = \text{Int}^R(E, D).$$

The first part of this work focuses on the algebraic structure of $\text{Int}^R(E, D)$ and $\text{Int}_B^R(E, D)$. We describe their prime ideals, localization properties, and star operations in terms of $\text{Int}^R(E, D)$. In addition, we examine the transfer of ring-theoretic properties between these function rings and the base domain D , with particular attention to their module structure. The second part of this work is devoted to the Krull dimension of these rings. We prove that for any fractional subset E of a Jaffard domain D , the ring $\text{Int}^R(E, D)$ is itself a Jaffard domain with

$$\dim(\text{Int}^R(E, D)) = 1 + \dim(D).$$

For pseudo-valuation domains with finite residue field, we show that $\dim(\text{Int}^R(E, D)) = 1 + \dim(D)$ whenever E is a fractional subset of the associated valuation overring. More generally, for an extension $D \subseteq B$ sharing a nonzero ideal I with D/I finite, and for any fractional subset $E \subseteq B$, we establish the bounds

$$1 + \dim(D) \leq \dim(\text{Int}_B^R(E, D)) \leq 1 + \dim_v(B),$$

where $\dim_v(B)$ denotes the valuative dimension of B . Several examples illustrate the range of possible Krull dimensions in both the polynomial and rational contexts. We further



calculate the Krull dimension of $\text{Int}^R(E, D)$. across various classes of integral domains and subsets E , and extend these results to $\text{Int}_B(E, D)$.

Finally, we introduce the rational closure of E ,

$$\text{cl}^R(E) := \{ x \in K \mid \psi(x) \in D \text{ for all } \psi \in \text{Int}^R(E, D) \},$$

and compare it to the divisorial closure when D is a Strong Mori domain. The polynomial closure is also investigated in the context of Mori domains.

Key Words :

Integer-valued polynomials, Integer-valued rational functions, Krull dimension, Star operations.